EVN de dimension finie [75]

▶ L'ensemble $[y = 0]$ est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$

– soit en tant que sous-espace vectoriel de dimension finie **[3.3]**,
– soit en tant qu'image réciproque du fermé $\{0\} \subset \mathbb{R}$ par l'application continue $[(x, y) \mapsto y]$ (linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$).

Son complémentaire : $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus [y = 0]$ est donc un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

▶ La fonction $\left[(x, y) \mapsto e^{-2y}\right]$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ comme composée de fonctions continues

$$(x, y) \overset{\text{lin.}}{\longmapsto} -2y \overset{\exp}{\longmapsto} e^{-2y}$$

de même que la fonction $[(x, y) \mapsto \operatorname{sh}(xy)]$.

$$(x, y) \overset{\text{polyn.}}{\longmapsto} xy \overset{\text{sh}}{\longmapsto} \operatorname{sh}(xy)$$

Leur produit

$$\left[(x, y) \mapsto e^{-2y} \operatorname{sh}(xy)\right]$$

est donc continu sur $\mathbb{R}^2$.

La fonction F est donc définie et continue sur l'ouvert Ω en tant que quotient d'une application continue sur $\mathbb{R}^2$ par une application (linéaire) continue sur $\mathbb{R}^2$, qui ne s'annule en aucun point de Ω.

I. Prolongement

▶ Pour prolonger F en une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$, il faut (*mais ce n'est peut-être pas suffisant*) définir $F(x, 0)$ de telle sorte que

$$F(x, 0) = \lim_{y \to 0} F(x, y)$$

(Théorème de composition des limites **[Chap.22 - 59]**).

Or, à x fixé,

$$F(x, y) \underset{y \to 0}{\sim} \frac{1 \times (xy)}{y} = x$$

donc il *faut* poser $F(x, 0) = x$ *si on veut avoir une chance* de définir un prolongement continu sur $\mathbb{R}^2$.

REMARQUE.— Les pinailleurs auront remarqué un "équivalent à 0" dans le cas $x = 0$. Mais $F(0, y) = 0$ pour tout $y \neq 0$ et, dans ce cas, l'équivalent à 0 est juste. (Si les pinailleurs pouvaient être aussi rigoureux pour établir la continuité du prolongement... mais c'est sans doute juste un rêve...)

II. Continuité du prolongement

Résumons : la fonction F est maintenant définie sur $\mathbb{R}^2$ tout entier par

$$\forall\, (x, y) \in [y \neq 0], \quad F(x, y) = \frac{e^{-2y} \operatorname{sh}(xy)}{y} \tag{1}$$

et par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad F(x, 0) = x \tag{2}$$

et nous savons déjà qu'elle est continue sur l'ouvert Ω.

Il nous reste donc à vérifier que F est continue sur le fermé $[y = 0]$, c'est-à-dire continue en chaque point $(x_0, 0) \subset [y = 0]$.

▶ Fixons $x_0 \in \mathbb{R}$ (une fois pour toutes) et restreignons-nous au carré

$$K_0 = [x_0 - 1, x_0 + 1] \times [-1, 1] \tag{3}$$

centré au point de référence $M_0 = (x_0, 0) \in [y = 0]$.

Chaque point $M = (x, y)$ du carré K_0 peut s'écrire

$$M = M_0 + \mathbf{h} \quad \text{avec} \quad \mathbf{h} = (x - x_0, y) \tag{4}$$

de telle sorte que

$$|y| \leqslant 1 \quad \text{et} \quad |x - x_0| \leqslant 1 \tag{5}$$

mais aussi

$$|x| \leqslant 1 + |x_0| \overset{\text{not.}}{=} A_0 \quad \text{et} \quad |xy| \leqslant |x| \leqslant A_0. \tag{6}$$

On peut choisir arbitrairement ***[Chap.23 - 35]*** *une norme sur* $\mathbb{R}^2$ *pour faire les calculs, je choisis la norme produit*

$$\|\mathbf{h}\|_\infty = \max\{|x - x_0|, |y|\} \tag{7}$$

— parce que ça m'arrange, *vous verrez bien.*

▷ Si $M = (x, 0)$, alors

$$\big|F(M) - F(M_0)\big| = |x - x_0| = \|\mathbf{h}\|. \tag{8}$$

▷ Si $M = (x, y)$ avec $y \neq 0$, alors

$$\begin{aligned}\big|F(M) - F(M_0)\big| &= \left|\frac{e^{-2y}\,\mathrm{sh}(xy)}{y} - x_0\right| \\ &= \left|\frac{e^{-2y}\,\mathrm{sh}(xy) - xy}{y} + (x - x_0)y\right|\end{aligned}$$

et par (5, 7)

$$\big|F(M) - F(M_0)\big| \leqslant \left|\frac{e^{-2y}\,\mathrm{sh}(xy) - xy}{y}\right| + \underbrace{|y|\,|x - x_0|}_{\leqslant \|\mathbf{h}\|}. \tag{9}$$

Avant d'aller plus loin, un petit rappel sur l'inégalité de Taylor-Lagrange.

❧ ***Ordre 1.*** *Si la fonction* f *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur le segment* $[-A, A]$*, alors*

$$\forall\, u \in [-A, A], \qquad \big|f(u) - f(0)\big| \leqslant \max_{t \in [-A,A]} \big|f'(t)\big|\,|u|.$$

(Comme f' *est continue sur le segment* $[-A, A]$*, elle est bornée et atteint ses bornes : on a bien un max et pas seulement un sup.)*

Avec $f(u) = e^{-2u}$ *et* $A = 1$*, on en déduit qu'il existe une constante* $C_1 > 0$ *telle que*

$$\forall\, y \in [-1, 1], \quad |e^{-2y} - 1| \leqslant C_1\,|y|. \tag{10}$$

(On peut prendre $C_1 = e^2$*, mais cette précision est sans aucun intérêt.)*

❧ ***Ordre 2.*** *Si la fonction* f *est de classe* $\mathscr{C}^2$ *sur le segment* $[-A, A]$*, alors*

$$\forall\, u \in [-A, A], \qquad \big|f(u) - f(0) - f'(0)u\big| \leqslant \max_{t \in [-A,A]} \big|f''(t)\big|\,\frac{|u|^2}{2}.$$

Avec $f(u) = \mathrm{sh}\,u$ *(sous-entendu :* $u = xy$*) et* $A = A_0$*, on en déduit qu'il existe une constante* $C_2 > 0$ *telle que*

$$\forall\, (x, y) \in K_0, \quad |\mathrm{sh}(xy) - xy| \leqslant C_2\,|xy|^2 \tag{11}$$

car $|xy| \leqslant A_0$*. (On peut prendre* $C_2 = (\mathrm{sh}\,A_0)/2$*, mais là encore cette précision est sans intérêt.)*

▷ Pour tout point $M = (x, y) \in K_0$, on déduit de l'inégalité de Taylor-Lagrange que (10)

$$|e^{-2y} - 1| \leqslant C_1\,|y|$$

et que (6, 11)

$$|\mathrm{sh}(xy) - (xy)| \leqslant C_2\,|xy|^2 \leqslant C_2 A_0^2 |y|^2.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\left|e^{-2y}\,\mathrm{sh}(xy)-xy\right| &\leqslant \left|e^{-2y}(\mathrm{sh}(xy)-xy)+xy(e^{-2y}-1)\right| \\ &\leqslant e^{-2y}\left|\mathrm{sh}(xy)-xy\right|+|xy||e^{-2y}-1|\end{aligned}$$

donc il existe une constante $C_3 = e^2C_2A_0^2 + A_0C_1 > 0$ telle que

$$\left|e^{-2y}\,\mathrm{sh}(xy)-xy\right| \leqslant C_3|y|^2$$

et donc telle que

$$\left|\frac{e^{-2y}\,\mathrm{sh}(xy)-xy}{y}\right| \leqslant C_3|y| \leqslant C_3\,\|\mathbf{h}\| \tag{12}$$

pour tout $M = (x, y \neq 0) \in K_0$.

▷ Il existe enfin (9, 12) une constante $C_4 = C_3 + 1 \geqslant 1$ telle que

$$\forall\, M \in K_0, \quad \left|F(M)-F(M_0)\right| \leqslant C_4|y| \leqslant C_4\|\mathbf{h}\|,$$

que M soit sur la droite $[y = 0]$ ou en dehors de cette droite.

Lorsque M tend vers M_0, c'est-à-dire lorsque $\|\mathbf{h}\|$ tend vers 0, le réel $F(M)$ tend vers $F(M_0)$ par encadrement, ce qui prouve que F est continue au point M_0.

► Ayant prouvé que F était continue en chaque point M_0 de la droite $[y = 0]$, on a démontré que F était continue sur $\mathbb{R}^2$ tout entier.

III. Expressions des dérivées partielles

► Sur l'ouvert Ω, on calcule les dérivées partielles avec les règles habituelles (1).

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = e^{-2y}\,\mathrm{ch}(xy) \tag{13}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \frac{e^{-2y}}{y^2}\left[xy\,\mathrm{ch}(xy)-(2y+1)\,\mathrm{sh}(xy)\right] \tag{14}$$

► En revanche, en un point M_0 de $[y = 0]$, *partie de $\mathbb{R}^2$ qui n'est pas un ouvert*, on ne peut plus appliquer les règles habituelles pour calculer les dérivées partielles. Il faut revenir à la définition : poser le taux d'accroissement (2) et étudier sa limite.

▷ Dérivée partielle par rapport à x :

$$\frac{F(x+h,0)-F(x,0)}{(x+h)-x} = \frac{(x+h)-x}{(x+h)-x} = 1$$

donc

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \frac{\partial F}{\partial x}(x,0) = 1. \tag{15}$$

▷ Dérivée partielle par rapport à y :

$$\frac{F(x,0+h)-F(x,0)}{(0+h)-0} = \frac{e^{-2h}\,\mathrm{sh}(xh)-xh}{h^2}$$

On rappelle qu'on calcule ici une dérivée partielle *: seule la variable h tend vers 0, l'autre variable x reste fixée.* Lorsque h tend vers 0,

$$\begin{aligned}e^{-2h}\,\mathrm{sh}(xh)-xh &= [1-2h+o(h)][xh+o(h^2)]-xh \\ &= -2xh^2+o(h^2)\end{aligned}$$

et par conséquent

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x,0) = -2x. \tag{16}$$

IV. Continuité des dérivées partielles

► D'après les calculs précédents (13, 15),

$$\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = e^{-2y}\,\mathrm{ch}(xy)$$

même pour $y = 0$.

Il est donc clair que la dérivée partielle $\partial F/\partial x$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Il n'est pas nécessaire, je pense, de détailler les arguments, qui sont analogues aux arguments présentés au début pour la continuité de F sur Ω.

► C'est moins simple pour l'autre dérivée partielle... Mais la méthode est la même que celle que nous avons employée pour la continuité de F.

Pour simplifier le boulot du dactylographe, la dérivée partielle étudiée sera notée F_y au lieu de $\partial F/\partial y$.

▷ Nous fixons donc $M_0 = (x_0, 0)$ et nous allons comparer $F_y(M_0)$ à $F_y(M)$ en nous restreignant aux points $M = (x,y) \in K_0$.

▷ Si $M \in [y = 0]$, alors (16, 4, 7)

$$\big|F_y(M) - F_y(M_0)\big| = |-2x + 2x_0| = 2\|h\|. \tag{17}$$

▷ Si $M \in [y \neq 0]$, alors (14)

$$F_y(M) - F_y(M_0) = \frac{e^{-2y}[xy\,\mathrm{ch}(xy) - (1+2y)\,\mathrm{sh}(xy)]}{y^2} + 2x + 2(x_0 - x)$$

(noter l'astuce taupinale !) et donc

$$\big|F_y(M) - F_y(M_0)\big| \leqslant \left|\frac{e^{-2y}[xy\,\mathrm{ch}(xy) - (1+2y)\,\mathrm{sh}(xy)]}{y^2} + 2x\right| + 2\|h\|_\infty. \tag{18}$$

▷ Grâce à l'astuce taupinale,

$$\begin{aligned} &xy\,\mathrm{ch}(xy) - (1+2y)\,\mathrm{sh}(xy) \\ &\qquad = xy[\mathrm{ch}(xy) - 1] + xy - (1+2y)xy - (1+2y)[\mathrm{sh}(xy) - xy] \\ &\qquad = -2xy^2 + xy[\mathrm{ch}(xy) - 1] - (1+2y)[\mathrm{sh}(xy) - xy] \end{aligned}$$

mais aussi

$$\begin{aligned} &e^{-2y}[xy\,\mathrm{ch}(xy) - (1+2y)\,\mathrm{sh}(xy)] \\ &\qquad = [xy\,\mathrm{ch}(xy) - (1+2y)\,\mathrm{sh}(xy)] \\ &\qquad\quad + [e^{-2y} - 1][xy\,\mathrm{ch}(xy) - (1+2y)\,\mathrm{sh}(xy)] \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} &e^{-2y}[xy\,\mathrm{ch}(xy) - (1+2y)\,\mathrm{sh}(xy)] + 2xy^2 \\ &\qquad = xy[\mathrm{ch}(xy) - 1] - (1+2y)[\mathrm{sh}(xy) - xy] \\ &\qquad\quad + [e^{-2y} - 1][xy\,\mathrm{ch}(xy) - (1+2y)\,\mathrm{sh}(xy)] \end{aligned}$$

d'où l'on tire, par inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} &\big|e^{-2y}[xy\,\mathrm{ch}(xy) - (1+2y)\,\mathrm{sh}(xy)] + 2xy^2\big| \\ &\qquad \leqslant |xy|\big|\mathrm{ch}(xy) - 1\big| + 3\big|\mathrm{sh}(xy) - xy\big| \\ &\qquad\quad + |e^{-2y} - 1|\,\big[2|x|y^2 + |xy|\big|\mathrm{ch}(xy) - 1\big| + 3\big|\mathrm{sh}(xy) - xy\big|\big] \end{aligned}$$

puisque $|y| \leqslant 1$ (5).

▷ En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 sur $[-1, 1]$,

$$|e^{-2y} - 1| \leqslant C_1 |y| \tag{19}$$

puis à l'ordre 2 sur $[-A_0, A_0]$,

$$|\mathrm{ch}(xy) - 1| \leqslant C_2'|xy|^2 \tag{20}$$

et enfin à l'ordre 3 sur $[-A_0, A_0]$,

$$|\mathrm{sh}(xy) - xy| \leqslant C_3'|xy|^3 \tag{21}$$

où C_1, C_2' et C_3' ne dépendent pas de $(x, y) \in K_0$.

En revenant à l'encadrement précédent, nous en déduisons que

$$\begin{aligned}
&\left|e^{-2y}[xy\,\mathrm{ch}(xy) - (1+2y)\,\mathrm{sh}(xy)] + 2xy^2\right| \\
&\qquad \leqslant C_2'A_0^3|y|^3 + 3C_3'A_0^3|y|^3 \\
&\qquad\quad + C_1|y|\left[2A_0y^2 + C_2'A_0^3|y|^3 + 3C_3'A_0^3|y|^3\right] \\
&\qquad \leqslant C_4'|y|^3 \leqslant C_4'\|h\|_\infty\, y^2
\end{aligned}$$

puisque $|y| \leqslant 1$ (5).

▷ On en déduit enfin (18) que

$$\left|F_y(M) - F_y(M_0)\right| \leqslant (C_4' + 2)\|h\|_\infty$$

pour tout $M \in K_0$, que le point M soit situé sur la droite $[y = 0]$ ou en dehors de cette droite.

Cet encadrement prouve bien que la dérivée partielle F_y est continue en chaque point M_0 de l'axe $[y = 0]$.

On a ainsi démontré que F_y était continue sur $\mathbb{R}^2$ tout entier.

► Les deux dérivées partielles de F étant définies et continues sur $\mathbb{R}^2$, on en déduit que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.