EVN de dimension finie [70]

► Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad u_n(x,y) = \frac{1}{(1+x^2+y^2)^n}.$$

Les fonctions u_n sont des fonctions rationnelles qui n'ont pas de pôles dans $\mathbb{R}^2$, donc elles sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$.

► Pour $(x,y) \neq (0,0)$, le réel $F(x,y)$ doit être vu comme la somme d'une série géométrique de raison

$$0 \leqslant r = \frac{1}{1+x^2+y^2} < 1.$$

Pour $(x,y) = (0,0)$, la raison de la série géométrique est égale à 1 et la série diverge grossièrement.

Donc la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur l'ouvert

$$\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$$

et seulement sur cet ouvert.

► Comme on a reconnu une série géométrique, on peut expliciter $F(x,y)$:

$$F(x,y) = \frac{1}{1-r(x,y)} = \frac{1+x^2+y^2}{x^2+y^2}.$$

En tant que fonction rationnelle dont l'unique pôle est l'origine $O = (0,0)$, la fonction F est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$.

► Munissons le plan $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne canonique — *parce que ça nous arrange.*

Dans ces conditions, pour $M = (x,y)$, on a

$$\|\mathbf{OM}\|^2 = x^2 + y^2.$$

▷ Le point $M = (x,y)$ tend vers l'origine O si, et seulement si, la distance $OM = \mathbf{OM}$ tend vers 0, c'est-à-dire si (x^2+y^2) tend vers 0. Or

$$\lim_{u \to 0} \frac{1+u}{u} = +\infty$$

et, par composition de limites,

$$\lim_{M \to O} f(M) = +\infty.$$

▷ Le point M tend vers l'infini si, et seulement si, la distance OM tend vers $+\infty$, c'est-à-dire si

$$u = (x^2+y^2)$$

tend vers $+\infty$. Or

$$\lim_{u \to +\infty} \frac{u+1}{u} = 1$$

donc, par composition de limites,

$$\lim_{M \to \infty} f(M) = 1.$$

En reconnaissant la série géométrique, nous avons pu expliciter $F(x,y)$ et en déduire très facilement la régularité et calculer ses limites aux voisinages de l'origine et de l'infini.

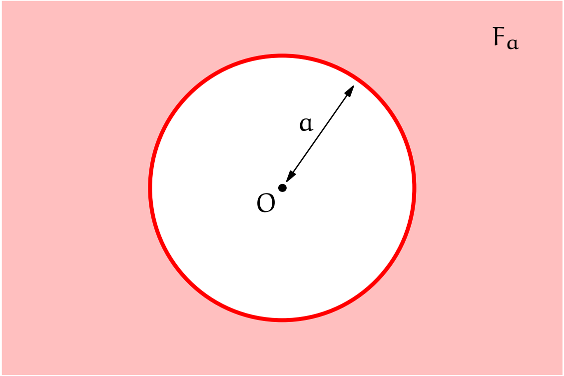
Il n'est pas inintéressant d'oublier la série géométrique et de voir comment les méthodes théoriques vues en cours nous donnent ces mêmes résultats.

► La présence du motif (x^2+y^2) nous impose de passer en coordonnées polaires !

Nous allons donc travailler sur le domaine (fermé)

$$F_a = [x^2+y^2 \geqslant a^2]$$

pour $a > 0$.



▷ Pour tout $(x,y) \in F_a$,

$$0 \leqslant u_n(x,y) \leqslant \frac{1}{(1+a^2)^n}.$$

Le majorant obtenu est indépendant de (x,y) et la série (géométrique !)

$$\sum \frac{1}{(1+a^2)^n}$$

est convergente, donc la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur F_a.

▷ Comme les fonctions u_n sont continues sur F_a, on en déduit que la somme F est continue sur F_a.

▷ Par conséquent, la somme F est continue sur

$$\Omega = \bigcup_{a>0} F_a.$$

Il faut bien distinguer le moyen *(= la convergence normale) et la* fin *(= la continuité de F).*

La continuité étant une propriété locale*, il suffit que F soit continue sur tous les fermés F_a pour qu'elle soit continue sur l'ouvert Ω tout entier.*

Au contraire, la convergence normale étant une propriété globale*, il peut y avoir convergence normale sur tous les fermés F_a sans qu'il y ait convergence normale sur leur union. On a même intérêt à croire qu'il s'agit du cas général pour éviter de raconter des bêtises !*

Et en fait, comme la continuité est une propriété locale, peu importe *qu'il y ait convergence normale ou pas sur Ω tout entier...*

Il y a au moins trois manières de prouver que la série de fonctions $\sum u_n$ ne converge pas normalement sur Ω.

❧ *Chaque fonction u_n admet une limite finie au voisinage de l'origine. Donc : si la série de fonctions $\sum u_n$ convergeait normalement au voisinage de O, la somme F aurait une limite finie au voisinage de O* ***[Chap.11 - 76]****, ce qui est faux d'après l'énoncé.*
❧ *Chaque fonction u_n admet une limite finie $\ell_n = 1$ au voisinage de l'origine et s'il y avait convergence normale au voisinage de O, alors la série $\sum \ell_n$ devrait converger* ***[Chap.11 - 76]****, alors qu'elle diverge grossièrement.*
❧ *On peut aussi revenir à la définition de la convergence normale et calculer $\|u_n\|_\infty$ sur Ω : pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\sup_{(x,y)\in\Omega} \left|u_n(x,y)\right| = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|u_n(x,y)\right| = 1$$

et la série $\sum 1$ est divergente.

► Le fermé F_a est un voisinage de l'infini **[Chap.22 - 16.5]** et la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur F_a.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\lim_{(x,y)\to\infty} u_n(x,y) = \lim_{r\to+\infty} \frac{1}{(1+r^2)^n} = 0$$

et $u_0(x,y) \to 1$ au voisinage de l'infini. Par **[Chap.11 - 76]** généralisé par **[Chap.25 - 69]**, la somme F tend vers une limite finie au voisinage de l'infini et

$$\lim_{(x,y)\to\infty} F(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{(x,y)\to\infty} u_n(x,y) = 1.$$

► Pour étudier la limite au voisinage de l'origine, on peut appliquer une méthode classique.

▷ Fixons $A > 0$. Il existe un entier N tel que $N > A$ et

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sum_{n=0}^{N} u_n(x,y) = N+1 > A+1.$$

Par conséquent, il existe $r > 0$ tel que

$$\forall\,(x,y)\in\Omega, \quad \|(x,y)\| \leqslant r \implies \sum_{n=0}^{N} u_n(x,y) \geqslant A$$

et comme $\sum u_n(x,y)$ est une série de terme général positif, on en déduit que

$$\forall\,(x,y)\in\Omega, \quad \|(x,y)\| \leqslant r \implies F(x,y) \geqslant A.$$

On vient précisément de démontrer que F tend vers $+\infty$ au voisinage de l'origine.

Comme l'énoncé indique que F tend vers l'infini au voisinage de l'origine, il est inutile de chercher à appliquer un théorème du cours : aucun *théorème au programme ne permet de justifier une limite infinie !*