EVN de dimension finie [79]

► Comme $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. On peut choisir la norme produit

$$\|M\|_\infty = \max_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |m_{i,j}|$$

par exemple.

D'après la formule du produit matriciel,

$$\begin{aligned} \|AB\|_\infty &= \max_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{\hat{\imath},j} b_{k,j} \right| \\ &\leqslant n \|A\|_\infty \, \|B\|_\infty . \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\forall\, k \geqslant 1, \quad \|A^k\|_\infty \leqslant n^{k-1} \|A\|_\infty^k$$

et nous utiliserons dans la suite la majoration suivante, plus grossière mais plus simple :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \|A^k\|_\infty \leqslant (n\|A\|_\infty)^k. \tag{1}$$

REMARQUE.— *Si on dispose d'une* ***norme d'algèbre*** *sur* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ ***[Ch.3 - 35]*** *(par exemple la norme subordonnée à une norme sur* $\mathbb{K}^n$ ***[Ch.3 - 59]****), on dispose d'une estimation plus simple encore :*

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \|A^k\| \leqslant \|A\|^k. \tag{2}$$

Nous n'aurons pas besoin de faire une telle hypothèse.

[79.1] *Tout ce qui suit est une variation sur la série géométrique complexe : si* $|z| < 1$*, alors* $(1+z)$ *est inversible et*

$$(1+z)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k z^k.$$

On notera que le module est une norme d'algèbre sur $\mathbb{C}$*.*

► Considérons la série de matrices

$$\sum (-1)^k A^k.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on sait que (1)

$$\|(-1)^k A^k\|_\infty \leqslant (n\|A\|_\infty)^k.$$

Par conséquent, si $\|A\|_\infty < 1/n$, alors la série de terme général positif

$$\sum \|(-1)^k A^k\|_\infty$$

est convergente et la série de matrices $\sum (-1)^k A^k$ est absolument convergente et donc **[8.2]** convergente. On peut donc poser

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k A^k \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}). \tag{3}$$

Nous venons de démontrer que, pour toute matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ *telle que*

$$\|A\|_\infty < \frac{1}{n}, \tag{4}$$

la suite des sommes partielles

$$S_N = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k A^k \tag{5}$$

convergeait vers une matrice S *:*

$$\lim_{N\to+\infty} \|S - S_N\|_\infty = 0.$$

❧ *Si on avait considéré une autre norme* $\|\cdot\|$ *sur* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$*, on aurait obtenu un résultat similaire. En effet, comme* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ *est un espace de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes et il existe donc deux réels* $0 < a < b$ *tels que*

$$\forall\, M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \quad a\|M\|_\infty \leqslant \|M\| \leqslant b\|M\|_\infty.$$

En particulier, si $\|M\| < a/n$*, alors* $\|M\|_\infty < 1/n$ *et la série*

$$\sum (-1)^k M^k$$

converge absolument pour $\|\cdot\|_\infty$ *et donc pour* $\|\cdot\|$ *(par équivalence des normes).*
❧ *Le fait de remplacer une norme par une autre n'affecte pas la convergence des sommes partielles, ni ne modifie la limite des sommes partielles. Elle modifie cependant la condition sur* A *: on est passé de*

$$\|A\|_\infty < 1/n \qquad \text{à} \qquad \|A\| < a/n$$

et, si $\|\cdot\|$ *était une* norme d'algèbre, *il suffirait que*

$$\|A\| < 1$$

pour que la série converge absolument.
❧ *On peut formuler la conclusion de manière assez générale pour que le résultat soit valable indépendamment de la norme choisie : si* $\|A\|$ *est assez proche de* 0*, alors la série de matrices* $\sum (-1)^k A^k$ *converge absolument. (Cet* assez *est lourd de sous-entendus !)*

▶ Soit $N \in \mathbb{N}$.

▷ Par télescopage,

$$(I_n + A)S_N = I_n + (-1)^N A^{N+1}$$

donc (4)

$$\begin{aligned}\|(I_n + A)S_N - I_n\|_\infty &= \|(-1)^N A^{N+1}\|_\infty \\ &\leqslant \big(\underbrace{n\|A\|_\infty}_{<1}\big)^{N+1}\end{aligned}$$

ce qui prouve que

$$\lim_{N\to+\infty} (I_n + A)S_N = I_n.$$

▷ D'autre part,

$$\begin{aligned}&\|(I_n + A)S_N - (I_n + A)S\|_\infty \\ &\qquad = \|(I_n + A)(S_N - S)\|_\infty \\ &\qquad \leqslant \underbrace{n\|I_n + A\|_\infty}_{\text{Cte}} \|S_N - S\|_\infty\end{aligned}$$

donc

$$\lim_{N\to+\infty} (I_n + A)S_N = (I_n + A)S$$

et, par unicité de la limite,

$$(I_n + A)S = I_n. \tag{6}$$

▷ On démontrerait de même que

$$\lim_{N \to +\infty} S_N(I_n + A) = I_n = S(I_n + A).$$

▷ On a ainsi prouvé que $(I_n + A)$ était inversible (sous la condition $\|A\|_\infty < 1/n$) et que son inverse était la somme S.

► Pour toute matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ assez proche (4) de la matrice nulle, on a donc démontré que

$$(I + A)^{-1} = I_n - A + \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k A^k$$

où la série du second membre est absolument convergente.

D'après l'inégalité triangulaire version sommable **[Ch.5 - 32]**,

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k A^k \right\|_\infty &\leqslant \sum_{k=2}^{+\infty} \|(-1)^k A^k\|_\infty \\
&\leqslant \sum_{k=2}^{+\infty} (n\|A\|_\infty)^k \\
&\leqslant \frac{(n\|A\|_\infty)^2}{1 - n\|A\|_\infty} \\
&\leqslant \frac{n^2}{1 - n\|A\|_\infty} \cdot \|A\|_\infty^2
\end{aligned}$$

et le majorant trouvé bien un $\mathcal{O}(\|A\|_\infty^2)$ lorsque $\|A\|_\infty$ tend vers 0.

REMARQUE.— Il est important de comprendre ici que la variable est la matrice A tandis que l'entier n est fixé.

On vient ici de démontrer que la fonction f est différentiable au point $M_0 = I_n$ et que

$$df(I_n)(H) = -H.$$

[79.2] Considérons une matrice inversible M_0, une matrice M proche de M_0 (en un sens à préciser) et posons

$$M = M_0 + H.$$

Comme M_0 est inversible, on peut factoriser par M_0.

$$M = M_0(I_n + M_0^{-1}H).$$

► On sait que

$$\|M_0^{-1}H\|_\infty \leqslant n\|M_0^{-1}\|_\infty \|H\|_\infty. \tag{7}$$

Par conséquent, si l'accroissement H est assez petit pour que

$$\|H\|_\infty < \frac{1}{n^2\|M_0^{-1}\|_\infty}, \tag{8}$$

alors

$$\|M_0^{-1}H\|_\infty < \frac{1}{n}$$

et d'après **[79.1]**, la matrice

$$I_n + M_0^{-1}H$$

est inversible.

Dans ces condition,s la matrice M, en tant que produit de matrices inversibles, est elle aussi inversible.

On vient de prouver que, si la matrice $H = M - M_0$ est assez petite au sens (8), alors la matrice $M = M_0 + H$ est inversible.

Cela signifie en particulier que le groupe $GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert : autour de chaque matrice inversible M_0, il existe un voisinage de matrices inversibles.

▶ Par (7), si la matrice H tend vers 0, alors le produit $M_0^{-1}H$ tend aussi vers la matrice nulle et par **[79.1]**

$$\begin{aligned}(I_n + M_0^{-1}H)^{-1} &= I_n - M_0^{-1}H + o(M_0^{-1}H)\\ &= I_n - M_0^{-1}H + o(H)\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}M^{-1} &= [M_0(I_n + M_0^{-1}H)]^{-1}\\ &= (I_n + M_0^{-1}H)^{-1}M_0^{-1}\\ &= [I_n - M_0^{-1}H + o(H)]M_0^{-1}\\ &= M_0^{-1} - M_0^{-1}HM_0^{-1} + o(H).\end{aligned}$$

▶ Il est clair que l'application

$$\left[H \mapsto -M_0^{-1}HM_0^{-1}\right]$$

est linéaire sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

Ce développement limité à l'ordre 1 signifie que la fonction f est différentiable au point $M_0 \in GL_n(\mathbb{K})$ et que

$$df(M_0)(H) = -M_0^{-1}HM_0^{-1}.$$

▶ Donc l'application

$$f = \left[M \mapsto M^{-1}\right]$$

est différentiable sur son ouvert de définition $GL_n(\mathbb{K})$.

[79.3] D'après les formules de Cramer,

$$\forall\, M \in GL_n(\mathbb{K}), \quad M^{-1} = \frac{1}{\det M}\,{}^tC(M)$$

où $C(M)$ est la comatrice de M.

▶ Le dénominateur est une fonction polynomiale des coordonnées de M :

$$\det M = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)m_{1,\sigma(1)}\cdots m_{n,\sigma(n)} \tag{9}$$

et ne s'annule pas sur l'ouvert $GL_n(\mathbb{K})$.

▶ Les n^2 composantes du numérateur sont les cofacteurs, qui sont eux aussi des fonctions polynomiales des coordonnées de M (d'expressions analogues à (9)).

▶ Par conséquent, la fonction f est une fonction rationnelle des coefficients de M, elle est donc de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur son ouvert de définition $GL_n(\mathbb{K})$.