EVN de dimension finie [3.3]

► *Le polycopié est assez bancal sur la question ! Il est question d'un espace de dimension* E*, d'un sous-espace* F *de* E *et tout à coup, au* ***[3.3]****, on considère les sous-espaces vectoriels d'un espace* F *sans savoir si la dimension de* F *est finie ou pas...*

Sous-espaces d'un espace de dimension finie

► Soit E, un espace vectoriel de dimension finie et F, un sous-espace vectoriel de F. On peut alors déduire du Théorème de la base incomplète qu'il existe une base

$$\mathscr{B}_F = (e_1, \dots, e_r)$$

de F qu'on peut compléter en une base

$$\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_d)$$

de E.

► On note alors comme d'habitude

$$e_1^*, \dots, e_r^*, \dots, e_d^*$$

les formes linéaires coordonnées relatives à cette base $\mathscr{B}$, qui sont définies par la décomposition des vecteurs de E dans la base $\mathscr{B}$:

$$\forall\, x \in E, \quad x = \sum_{k=1}^{d} e_k^*(x) \cdot e_k. \tag{1}$$

► Si $x \in F$, alors il existe des scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ tels que

$$x = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k \cdot e_k$$

(on décompose x dans la base $\mathscr{B}_F$ de F) et donc tels que

$$x = \alpha_1 \cdot e_1 + \dots + \alpha_r \cdot e_r + 0 \cdot e_{r+1} + \dots + 0 \cdot e_d \tag{2}$$

ce qui nous donne une décomposition du vecteur x dans la base $\mathscr{B}$.

Comme il n'y a qu'une seule décomposition possible de x dans la base $\mathscr{B}$, on déduit de la comparaison de (1) et de (2) que

$$\forall\, r < k \leqslant d, \quad e_k^*(x) = 0.$$

► Réciproquement, si

$$\forall\, r < k \leqslant d, \quad e_k^*(x) = 0$$

alors on déduit de (1) que

$$x = \sum_{k=1}^{r} e_k^*(x) \cdot e_k \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_r) = F.$$

► Comme E est un espace de dimension *finie*, toute forme linéaire sur E est continue et son noyau est donc un fermé de E (image réciproque du fermé $\{0\} \subset \mathbb{R}$ par une application continue).

Dans E, espace de dimension d, le sous-espace F de dimension r est caractérisé par la donnée de $(d-r)$ équations cartésiennes

$$F = \bigcap_{r<k\leqslant d} [e_k^*(x) = 0]. \tag{3}$$

Comme les e_k^* sont des formes linéaires sur E, le sous-espace F est donc fermé en tant qu'intersection de fermés.

REMARQUE.— *La représentation (3) d'un sous-espace ne doit pas surprendre, elle est très banale !*
❧ *Si $\dim E = 2$, une droite de E est un hyperplan, représenté par une équation cartésienne :*

$$D = [ax + by = 0]$$

où $(a, b) \neq (0, 0)$.
❧ *Si $\dim E = 3$, un plan de E est un hyperplan, représenté par une équation cartésienne :*

$$P = [ax + by + cz = 0]$$

où $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ et une droite est représentée par un système de deux équations cartésiennes non proportionnelles :

$$D = \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \end{cases}.$$

❧ *La représentation (3) n'est donc qu'une généralisation de ces représentations bien connues. Pour s'en souvenir précisément, il faut se dire que*
- *on dispose de $d = \dim E$ degrés de liberté en tout*
- *on impose $(d-r)$ contraintes (les équations cartésiennes, provenant de formes linéaires linéairement indépendantes)*
- *il reste donc $r = d - (d-r)$ degrés de liberté dans F, donc*

$$\dim F = r.$$

Sous-espaces de dimension finie d'un espace de dimension quelconque

On suppose maintenant que E est un espace de dimension quelconque, on ne peut donc plus se reposer sur la donnée d'une base de E adaptée au sous-espace F.

REMARQUE.— *Si E est un espace préhilbertien, il existe une base orthonormée de F (Théorème de Gram-Schmidt), donc la projection orthogonale p sur F est bien définie et comme cette projection est continue (Théorème de Pythagore), on en déduit que*

$$F = \mathrm{Ker}(I_E - p)$$

est un fermé de E. *Cf* ***[Chap.22 - 63]*** *pour les détails.*

[3.1] On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs situés sur la droite $D = \mathbb{K} \cdot \varepsilon$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe donc un scalaire $\lambda_n \in \mathbb{K}$ tel que

$$u_n = \lambda_n \cdot \varepsilon.$$

(Ce scalaire est unique car ε n'est pas le vecteur nul.)

▷ La suite de terme général

$$|\lambda_n| = \frac{\|u_n\|}{\|\varepsilon\|}$$

est convergente (quotient d'une suite convergente **[Ch3 - 21.2]** par un réel strictement positif constant), donc la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

D'après le Théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une suite extraite $(\lambda_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un scalaire ℓ.

▷ Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\|\lambda_{n_k} \cdot \varepsilon - \ell \cdot \varepsilon\| = |\lambda_{n_k} - \ell| \, \|\varepsilon\|$$

donc la suite $(\lambda_{n_k} \cdot \varepsilon)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \cdot \varepsilon$.

REMARQUE.— *Ce résultat pouvait aussi bien être déduit du* ***[Ch23 - 18.3 §3]****.*

▷ Comme la suite $(\lambda_n \cdot \varepsilon)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, sa limite est sa seule valeur d'adhérence **[Ch3 - 24.3]** et donc

$$\lim_{n\to+\infty} \lambda_n \cdot \varepsilon = \ell \cdot \varepsilon.$$

On a ainsi démontré que : pour toute suite convergente d'éléments de D, la limite est encore un élément de D, c'est-à-dire : **toute droite vectorielle est une partie fermée de E.**

La démonstration par récurrence sur la dimension du sous-espace F est donc fondée.

[3.2] On suppose (HR) que tout sous-espace de E de dimension d est fermé et on considère maintenant un sous-espace F de dimension $(d+1)$.

Un vecteur $\varepsilon \neq 0_E$ étant choisi dans F, il existe un sous-espace H de F tel que

$$F = H \oplus \mathbb{K} \cdot \varepsilon \tag{4}$$

(version géométrique du Théorème de la base incomplète : la droite $\mathbb{K} \cdot \varepsilon$ admet un supplémentaire dans F).

Par **[3.1]** et (HR), les deux sous-espaces $\mathbb{K} \cdot \varepsilon$ et H sont des parties fermées de E. Il nous reste à en déduire que F est une partie fermée de E.

► Par (4), chaque vecteur $u \in F$ se décompose de manière unique

$$u = v + \lambda \cdot \varepsilon$$

avec $v \in H$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On peut donc définir une application

$$N : F \to \mathbb{R}_+$$

en posant

$$N(u) = \max\{\|v\|, |\lambda|\}.$$

▷ Si $N(u) = 0$, alors $\|v\| = |\lambda| = 0$ et comme $\|\cdot\|$ sépare les points, on en déduit que $v = 0_E$ et $\lambda = 0_{\mathbb{K}}$ et donc que

$$u = 0_E + 0_{\mathbb{K}} \cdot \varepsilon = 0_E,$$

donc N sépare les points.

▷ Pour tout scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$,

$$\alpha \cdot u = \underbrace{(\alpha \cdot v)}_{\in H} + \underbrace{(\alpha\lambda) \cdot \varepsilon}_{\in \mathbb{K}\cdot\varepsilon}$$

et comme la décomposition de $\alpha \cdot u$ dans (4) est unique, on en déduit que

$$\begin{aligned} N(\alpha \cdot u) &= \max\{\|\alpha \cdot v\|, |\alpha\lambda|\} \\ &= |\alpha| \, N(u) \end{aligned}$$

et donc que N est positivement homogène.

▷ Quels que soient les vecteurs

$$u = v + \lambda \cdot \varepsilon \quad \text{et} \quad u' = v' + \lambda' \cdot \varepsilon,$$

on a

$$(u + u') = \underbrace{(v + v')}_{\in H} + \underbrace{(\lambda + \lambda') \cdot \varepsilon}_{\in \mathbb{K} \cdot \varepsilon}.$$

Comme $\|\cdot\|$ est une norme sur E

$$\|v + v'\| \leqslant \|v\| + \|v'\| \leqslant N(u) + N(u')$$

et que $|\cdot|$ est une norme sur $\mathbb{K}$

$$|\lambda + \lambda'| \leqslant |\lambda| + |\lambda'| \leqslant N(u) + N(u')$$

donc

$$\begin{aligned} N(u + u') &= \max\{\|v + v'\|, |\lambda + \lambda'|\} \\ &\leqslant N(u) + N(u') \end{aligned}$$

donc N vérifie l'inégalité triangulaire.

▷ Donc N est bien une norme sur F.

Cette norme consiste à considérer F *comme l'**espace produit***

$$H \times (\mathbb{K} \cdot \varepsilon)$$

et non comme la somme directe (4). *Quand on y réfléchit, on se rend compte que les deux notions sont assez voisines...*

Par ailleurs, pour démontrer que N *est bien une norme, on a suivi pas à pas la démonstration **[Ch23 - 3.2]** — il est utile de connaître son cours !*

► Pour démontrer que F est une partie fermée de E, on considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de F et on suppose que cette suite converge vers $\ell \in E$. Il nous faut démontrer que $\ell \in F$.

▷ On dispose donc en fait de deux normes sur F : la norme N qui vient d'être définie et la norme induite sur F par restriction de la norme $\|\cdot\|$ sur E.

Comme F est un espace de dimension finie, toutes les normes sur F sont équivalentes.

En particulier, comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de F converge vers une limite $\ell \in E$ pour la norme $\|\cdot\|$, alors la suite $(\|u_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et donc **[Ch23 - 30.1]** la suite $\big(N(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée elle aussi.

*On ne peut pas invoquer **[Ch23 - 30.3]** ! En effet, pour démontrer que* F *est fermé, on considère une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* F *qui converge vers* $\ell \in E$ *et nous devons prouver que* $\ell \in F$.

On sait donc que $\|u_n - \ell\|$ *tend vers* 0 *(par définition même) mais* a priori *l'expression* $N(u_n - \ell)$ *n'a* aucun sens *parce qu'on ne sait pas encore si* ℓ *appartient bien à* F *(et la norme* N*, contrairement à* $\|\cdot\|$*, n'est définie que sur* F*, pas sur* E*).*

▷ Comme

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad |\lambda_n| \leqslant N(u_n),$$

la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. On applique à nouveau le Théorème de Bolzano-Weierstrass : il existe une suite extraite $(\lambda_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$.

On en déduit, comme plus haut, que

$$\lambda_{n_k} \cdot \varepsilon \xrightarrow[k\to+\infty]{} \lambda \cdot \varepsilon$$

et on sait aussi que

$$u_{n_k} \xrightarrow[k \to +\infty]{} \ell$$

(suite extraite d'une suite qui, par hypothèse, converge vers ℓ).

Par différence,

$$v_{n_k} = u_{n_k} - \lambda_{n_k} \cdot \varepsilon \xrightarrow[k \to +\infty]{} \ell - \lambda \cdot \varepsilon.$$

Or $(v_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de H qui, par (HR), est une partie fermée de E. Donc

$$\ell - \lambda \cdot \varepsilon \in H$$

et finalement

$$\ell = \underbrace{(\ell - \lambda \cdot \varepsilon)}_{\in H} + \underbrace{\lambda \cdot \varepsilon}_{\in \mathbb{K} \cdot \varepsilon} \in F.$$

► On vient de prouver que F est une partie fermée de E.

Par récurrence, on a démontré que **tout sous-espace de dimension finie de** E **est une partie fermée de** E.