Rapport CCINP MP (1)

[1.1] Pour démontrer que F est un sous-espace de E, il faut vérifier trois propriétés.
– L'ensemble F doit être contenu dans E. *C'est en général évident.*
– Le vecteur nul de E doit appartenir à F. *C'est en général évident.*

Je n'ai jamais compris l'intérêt de formuler cette propriété en constatant que F n'était pas l'ensemble vide.

– L'ensemble F doit être stable par combinaison linéaire. *C'est le seul point qui risque d'être un peu technique.*

Il n'est pas bon d'utiliser ce théorème de caractérisation systématiquement ! On doit savoir aussi que le noyau et l'image d'une application linéaire sont des sous-espaces vectoriels ; que $\mathrm{Vect}(e_i,\ i \in I)$ est un sous-espace vectoriel, quelle que soit la famille $(e_i)_{i\in I}$...

► Pour les définitions, ouvrez votre cours ! Pensez seulement à **hurler** qu'un vecteur doit être

NON NUL

pour être *propre*.

[3] Les principaux concepts de la Topologie sont
– voisinage d'un point
– partie ouverte, partie fermée
– partie compacte
– limite d'une suite, d'une fonction...

Et pas les normes ? Ben non. Les concepts précédents peuvent aussi être définis dans des espaces topologiques sur lesquels aucune norme n'est définie... Mais cela nous emmènerait très loin !

[4.1] Considérons une équation différentielle linéaire du second ordre (pour fixer les idées) et supposons qu'il existe une singularité en $t = b$. On a trouvé la solution générale sur l'intervalle $]a, b[$:

$$x(t) = f_1(t) + A_1 \cdot g_1(t) + B_1 \cdot h_1(t)$$

et la solution générale sur l'intervalle $]b, c[$:

$$x(t) = f_2(t) + A_2 \cdot g_2(t) + B_2 \cdot h_2(t).$$

Le théorème de structure nous dit que chaque solution est somme d'une solution particulière f et d'une combinaison linéaire $Ag + Bh$ d'une base (g, h) de l'espace des solutions de l'équation homogène.

La discussion sur le raccordement des solutions est en fait une discussion sur les constantes d'intégration A_1, B_1, A_2 et B_2.

Pour chacune des six fonctions f_i, g_i, h_i, l'alternative est en général la suivante :
– ou bien la fonction est prolongeable en une fonction $\mathscr{C}^\infty$ sur un intervalle qui contient b ;
– ou bien elle n'est même pas prolongeable par continuité en $t = b$.

Dans ces conditions, pour que le raccord soit continu, il suffit que

$$f_1(b) + A_1 \cdot g_1(b) + B_1 \cdot h_1(b) = f_2(b) + A_2 \cdot g_2(b) + B_2 \cdot h_2(b).$$

Pour qu'il soit de classe $\mathscr{C}^1$, il suffit que

$$f_1'(b) + A_1 \cdot g_1'(b) + B_1 \cdot h_1'(b) = f_2'(b) + A_2 \cdot g_2'(b) + B_2 \cdot h_2'(b)$$

et ainsi de suite.

On écrit alors un développement asymptotique à $\mathcal{o}[(t-b)^2]$ près au voisinage de $t = b$.

- Si on peut choisir les constantes d'intégration de telle sorte que les deux développements asymptotiques soient identiques de part et d'autre de b, on a trouvé une ou des solutions de classe $\mathscr{C}^2$ au moins sur $]a, c[$.
- Sinon, il n'y a pas de solution de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]a, c[$.

Pour une équation du second ordre, un raccordement par continuité ou de classe $\mathscr{C}^1$ n'a aucun intérêt !

[4.2] On considère une fraction rationnelle $F = \frac{P}{Q}$ et on suppose connue la factorisation de Q en produit de polynômes irréductibles et unitaires.

Non, il n'est pas nécessaire de supposer que P et Q sont premiers entre eux !

Oui, il est essentiel de connaître une factorisation de Q : sans factorisation explicite de Q, on sait qu'il existe une décomposition de F en éléments simples, mais on est incapable de la calculer.

► Si Q est scindé :

$$Q = \prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_k)^{m_k}$$

alors il existe une unique décomposition de F sous la forme

$$F = E + \sum_{k=1}^{r} \left[\sum_{\ell=1}^{m_k} \frac{a_{k,\ell}}{(X - \alpha_k)^\ell} \right]$$

où E est la partie entière de F (c'est-à-dire le quotient de la division euclidienne de P par Q) et les $a_{k,\ell}$ sont des scalaires.

On voit ici une somme de r termes (= le nombre de racines distinctes de Q) et chaque terme est lui-même une somme de m_k (= la multiplicité de la racine α_k) éléments simples.

Oui, certains des scalaires $a_{k,\ell}$ peuvent être nuls !

► Si $Q \in \mathbb{R}[X]$ n'est pas scindé, on peut toutefois le factoriser en produit d'irréductibles de $\mathbb{R}[X]$:

$$Q = \left[\prod_{k=1}^{q} (X - \alpha_k)^{m_k} \right] \left[\prod_{k=q+1}^{r} \underbrace{(X^2 + \beta_k X + \gamma_k)}_{\text{irréductible}}{}^{m_k} \right]$$

où les α_k sont les racines réelles de Q et où les réels β_k et γ_k vérifient

$$\forall\, q < k \leqslant r, \qquad \beta_k^2 - 4\gamma_k < 0.$$

Dans ce cas, la décomposition en éléments simples de F prend l'allure suivante :

$$F = E + \sum_{k=1}^{q} \left[\sum_{\ell=1}^{m_k} \frac{a_{k,\ell}}{(X - \alpha_k)^\ell} \right] + \sum_{k=q+1}^{r} \left[\sum_{\ell=1}^{m_k} \frac{a_{k,\ell} X + b_{k,\ell}}{(X + \beta_k X + \gamma_k)^\ell} \right].$$

La forme générale est donc la même ; pour les facteurs irréductibles de degré 1, le numérateur est constant ; pour les facteurs irréductibles de degré 2, le numérateur est un polynôme de degré inférieur à 1 (peut-être constant et éventuellement nul).

Toutes les astuces cohérentes avec l'expression théorique de la décomposition en éléments simples de F sont bonnes pour calculer cette décomposition, toutes sans exception *!*

Théoriquement, le calcul de cette décomposition revient à résoudre un système d'équations linéaires et ce système est toujours *un système de Cramer. Évidemment, poser un tel système et le résoudre est la pire méthode envisageable... mais cela convient parfaitement à un ordinateur.*

Je le rappelle : le seul obstacle pratique *au calcul de la décomposition en éléments simple est la factorisation du dénominateur de F.*

Généralisation (hors programme) : Si on connaît une factorisation

$$Q = \prod_{k=1}^{r} Q_k$$

où les polynômes Q_k sont deux à deux premiers entre eux, alors il existe une, et une seule, famille $(A_k)_{1\leqslant k\leqslant r}$ telle que

$$F = E + \sum_{k=1}^{r} \frac{A_k}{Q_k}$$

avec $\deg A_k < \deg Q_k$ *pour tout* $1 \leqslant k \leqslant r$.

Il faut bien comprendre que les deux décompositions ci-dessus se déduisent facilement de cette décomposition plus générale.

[5] Les **sommes partielles** de la série réelle ou complexe $\sum u_n$ sont les *nombres* définis par

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Les sommes partielles constituent donc une **suite** $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On dit que la **série** $\sum u_n$ converge (resp. diverge) lorsque la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles est convergente (resp. divergente).

Lorsque la série $\sum u_n$ converge, sa **somme** est la limite de la suite des sommes partielles. Ce *nombre* est alors noté

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} S_n.$$

*Mais qu'est-ce qu'une **série** au juste ? Que recouvre au juste la notation $\sum u_n$? Accrochez-vous ! La série $\sum u_n$ est la suite*

$$\big((u_n, S_n)\big)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{K}\times\mathbb{K})^{\mathbb{N}}.$$

Ce n'est donc pas simplement la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles...

C'est pourquoi il est absurde de parler d'une série croissante *: la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est peut-être monotone, mais pas la série (il n'y a pas d'ordre naturel sur $\mathbb{K}\times\mathbb{K}$.*

Tout comme il est absurde de présenter la somme S comme la limite de la série *: si la série converge, sa limite est le couple $(0, S)$.*

Maintenant, vous pouvez oublier la définition exacte d'une série — ce n'est pas très important.

[6] Pour calculer la somme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

il faut <u>résister</u> à la tentation d'écrire

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1}$$

(ce qui n'a pas de sens), revenir aux sommes partielles :

$$\sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{N+1}$$

et faire tendre N vers $+\infty$, ce qui prouve que la série est convergente et que sa somme est égale à 1.

[7] CSSA : Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 en décroissant, alors la série alternée $\sum(-1)^n u_n$ est convergente. De plus, le reste d'ordre n est majoré en valeur absolue par le premier terme négligé :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k\right| \leqslant u_{n+1}$$

et ce reste est du signe du premier terme négligé :

$$\operatorname{sgn} \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k = \operatorname{sgn}(-1)^{n+1}.$$

Il s'agit d'une condition suffisante pour qu'une série converge, ce n'est pas une condition nécessaire (même dans le cas d'une série alternée).

C'est l'un des très rares théorèmes qui peuvent s'appliquer aux séries semi-convergentes. (Il ne peut pas démontrer qu'une série est absolument convergente.)

En conséquence, ce théorème est incompatible avec les théorèmes de comparaison (qui, eux, ne s'appliquent qu'aux séries absolument convergentes).

[8] Les théorèmes de comparaison s'utilisent en comparant le terme général d'une série au terme général d'une série *absolument convergente* : typiquement, une *série de Riemann* ou une *série géométrique*.

Lorsque la série de référence $\sum v_n$ n'est pas absolument convergente, les comparaisons

$$u_n = o(v_n) \qquad \text{et} \qquad u_n = \mathcal{O}(v_n)$$

sont sans intérêt (formes indéterminées)*.*

On peut aussi comparer le terme général u_n au terme général d'une série de Poisson, mais ce n'est pas très intéressant car

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall 0 < q < 1, \quad \frac{\lambda^n}{n!} \underset{n \to +\infty}{=} o(q^n).$$

[9] Règle de D'Alembert : Si le quotient

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right|$$

tend vers une limite ℓ, alors
- si $\ell < 1$, la série $\sum u_n$ est absolument convergente ;
- si $\ell > 1$, la série $\sum u_n$ est très grossièrement divergente (son terme général tend vers l'infini).

Sous-entendu : si $\ell = 1$, on ne peut rien conclure...

Cette règle donne une condition suffisante (mais pas nécessaire) pour qu'une série converge absolument.

❧ La démonstration de la règle de D'Alembert consiste à comparer le terme général u_n à q^n où q est un réel proche de la limite ℓ.

[11] Pour vérifier si la série $\sum u_n$ est absolument convergente, on cherche l'ordre de grandeur de $|u_n|$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Pour vérifier si la fonction continue (par morceaux) f est intégrable sur $]a, b[$, on cherche l'ordre de grandeur de $|f(t)|$ lorsque t tend vers a et lorsque t tend vers b.

Il faut donc distinguer deux cas :
- lorsque la variable t tend vers une valeur infinie (et ce cas est assez analogue à celui des séries) ;
- lorsque la variable t tend vers une valeur finie t_0, c'est-à-dire lorsque $(t - t_0)$ tend vers 0 (et ce cas n'a rien à voir avec celui des séries).

❧ Les fonctions de référence au voisinage de $t = 0$ sont les fonctions de Riemann $1/t^\alpha$.

Les fonctions de référence au voisinage de $+\infty$ sont les fonctions de Riemann et les fonctions exponentielles $e^{-\alpha t}$.