Compacité – avril 2020

Soient E, un espace vectoriel normé par $\|\cdot\|$ et $K \subset E$, une partie compacte.
Les questions indexées par des numéros différents sont indépendantes.

1.

On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de K.

1.a. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

❍ Vrai ● Faux

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est quelconque ! Si le compact K n'est pas un singleton, il n'y a aucune chance pour que cette suite converge.

1.b. Toute suite extraite $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente.

❍ Vrai ● Faux

Si toute *suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, alors en particulier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente !*

1.c. Il existe une suite extraite $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge.

● Vrai ❍ Faux

C'est la définition de la compacité (qui précise en outre que la limite de cette suite extraite convergente appartient encore à K).

2.

On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Sa limite ℓ appartient à K.

● Vrai ❍ Faux

Toute partie compacte est en particulier une partie fermée.

3.

Si deux suites extraites $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite ℓ, alors la suite

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

est convergente.

❍ Vrai ● Faux

Si $\varphi(n) = 2n$ et $\psi(n) = 2n+1$, c'est vrai ! Mais c'est un cas très particulier...
Si $\varphi(n) = 3n$ et $\psi(n) = 3n+1$, alors on ne fait aucune hypothèse sur les termes u_{3n+2} et il n'y a donc aucune raison valable pour que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

4.

On considère deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de K.

4.a. On suppose que la suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell_1 \in K$. La suite extraite $(v_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell_2 \in K$.

❍ Vrai ● Faux

La fonction φ a été choisie pour que la suite extraite

$$(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$$

converge. Il n'y a aucun rapport avec la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donc il n'y a aucune raison pour que la suite extraite

$$(v_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$$

converge.

4.b. Il existe une fonction injective

$$\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

telle que les deux suites extraites

$$(u_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}} \qquad \text{et} \qquad (v_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$$

soient convergentes.

● Vrai ❍ Faux

Un produit cartésien de parties compactes de E est une partie compacte de $E \times E$.
Le produit $K \times K$ est compact, donc il existe une suite extraite de

$$(w_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big((u_n, v_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$$

qui converge vers un point

$$\ell = (a, b) \in K \times K.$$

Si cette suite extraite est $(w_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, alors les deux suites

$$(u_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}} \qquad \textit{et} \qquad (v_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$$

convergent et leurs limites respectives sont a et b.

4.c. Si les deux suites extraites

$$(u_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}} \qquad \text{et} \qquad (v_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$$

convergent, alors la suite extraite $(u_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers ℓ_1.

❍ Vrai ● Faux

À moins que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne soit convergente, il n'y a aucune raison pour que les deux suites extraites

$$(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}} \qquad \textit{et} \qquad (u_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$$

convergent vers la même limite.