Séries numériques - avril 2020

1.

1.a. La série numérique

$$\sum \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

est-elle convergente ?

● Oui ❍ Non

Série de Riemann, exposant $3/2 > 1$.

1.b. La série

$$\sum \frac{\sin n\pi}{n}$$

est convergente.

● Vrai ❍ Faux

Le numérateur est identiquement nul.

1.c. La série

$$\sum \frac{\sqrt{n}\cos(n\pi)}{n^2+1}$$

est absolument convergente.

● Vrai ❍ Faux

Terme général en $\mathcal{O}(1/n^{3/2})$.

2.

On suppose que la série $\sum u_n$ vérifie les hypothèses du Critère spécial des séries alternées.
Dans ces conditions, la série $\sum u_n$ est :

❏ semi-convergente

❏ absolument convergente

✔ l'un ou l'autre, ça dépend

Le Critère spécial des séries alternées est l'un des très rares théorèmes qui permettent de prouver la convergence d'une série qui n'est pas absolument convergente : c'est une caractéristique remarquable.
Il peut aussi s'appliquer à des séries absolument convergentes et, dans ce cas, il n'est pas pertinent de l'invoquer pour justifier la convergence de la série. Voir **[4.]**

3.

On suppose que la série $\sum u_n$ est alternée et que

$$|u_n| \sim \frac{1}{n}$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

$\boxed{\textbf{3.a.}}$ La série $\sum u_n$ est convergente.

❏ Vrai

❏ Faux

✔ Impossible de savoir

Le Théorème de comparaison nous dit seulement que la série $\sum u_n$ n'est pas absolument convergente.
Sans information supplémentaire (sur le signe des u_n par exemple), on ne peut rien en déduire sur la convergence de la série $\sum u_n$.

$\boxed{\textbf{3.b.}}$ La série $\sum u_n$ est absolument convergente.

❏ Vrai

✔ Faux

❏ Impossible de savoir

Le Théorème de comparaison pour les séries de terme général positif (ici : $^1/_n$ et $|u_n|$) nous dit que : si les termes généraux sont équivalents, alors les séries sont de même nature.
Il suffit de savoir que la série harmonique diverge pour conclure.

4.

On suppose que la série $\sum u_n$ est absolument convergente. Dans ces conditions, le Critère spécial des séries alternées est inutile.

❍ Vrai ● Faux

Bien sûr, le Critère spécial est inutile pour prouver la convergence puisqu'on suppose *que la série converge absolument.*
Mais le Critère spécial permet d'encadrer facilement le reste d'ordre n et, ça, c'est toujours utile !

5.

On considère les séries $\sum u_n$, $\sum v_n$ et $\sum w_n$ où

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad w_n = u_n + v_n.$$

$\boxed{\textbf{5.a.}}$ La série $\sum w_n$ est convergente si, et seulement si, les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes.

❍ Vrai ● Faux

Par linéarité, la somme de deux séries convergentes est encore une série convergente.
La réciproque est fausse : avec $u_n = 1$ et $v_n = -1$, la série $\sum w_n$ est convergente (son terme général est identiquement nul) alors que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont grossièrement divergentes.

$\boxed{\textbf{5.b.}}$ Si les deux séries $\sum u_n$ et $\sum w_n$ sont absolument convergentes, alors la série $\sum v_n$ est absolument convergente.

● Vrai ❍ Faux

Puisque $v_n = w_n - u_n$, la série $\sum v_n$ est absolument convergente en tant que différence de deux séries absolument convergentes.

$\boxed{\textbf{5.c.}}$ Si la série $\sum u_n$ est convergente et si la série $\sum v_n$ est absolument convergente, alors la série $\sum w_n$ est convergente.

● Vrai ❍ Faux

La convergence absolue d'une série réelle ou complexe implique sa convergence.
En tant que somme de deux séries convergentes, la série $\sum w_n$ est donc convergente.

$\boxed{\textbf{5.d.}}$ Dans ce cas, la série $\sum w_n$ est même absolument convergente.

❏ Oui, bien sûr !

❏ Non, évidemment !

✔ Faut voir, ptêt ben...

Sachant que la série $\sum v_n$ est absolument convergente et que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad w_n = v_n + u_n$$

la série $\sum w_n$ est absolument convergente si, et seulement si, la série $\sum u_n$ est absolument convergente.
L'énoncé ne nous dit rien à ce sujet, on ne peut donc pas conclure pour le moment.

$\boxed{\textbf{5.e.}}$ Si la série $\sum w_n$ est absolument convergente et si la série $\sum u_n$ est semi-convergente, alors la série $\sum v_n$ est convergente.

● Vrai ❍ Faux

En tant que différence de deux séries convergentes, la série $\sum v_n$ est convergente.

$\boxed{\textbf{5.f.}}$ Dans ce cas, la série $\sum v_n$ est même absolument convergente.

❏ Oui, bien sûr !

✔ Non, évidemment !

❏ Faut voir, ptêt ben...

On a $u_n = w_n - v_n$ et on suppose que la série $\sum w_n$ est absolument convergente.
Si la série $\sum v_n$ était absolument convergente, alors la série $\sum u_n$ serait absolument convergente en tant que différence de deux séries absolument convergentes.
Or la série $\sum u_n$ est supposée semi-convergente, donc elle n'est pas *absolument convergente !*
La série $\sum v_n$ n'est donc pas absolument convergente, elle est semi-convergente.

6.

On suppose que

$$u_n = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

6.a. Si $\alpha > 1$, on peut déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

● Vrai ❍ Faux

Oui, par comparaison avec une série de Riemann absolument convergente.

6.b. Si $\alpha = 1$, on peut déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

❍ Vrai ● Faux

Le théorème de comparaison avec o ou avec $\mathcal{O}$ ne permet pas de conclure lorsque la série de référence est divergente.

6.c. Si $\alpha < 1$, on peut déterminer la nature de la série $\sum u_n$

❍ Vrai ● Faux

Même remarque.

7.

On considère une série $\sum u_n$ dont le terme général est strictement positif.

7.a. On suppose que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell < 1.$$

Dans ces conditions, la série $\sum u_n$ est :

❏ semi-convergente

✔ absolument convergente

❏ divergente

C'est la règle de D'Alembert.

7.b. On suppose que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1.$$

Dans ces conditions, la série $\sum u_n$ est

❏ convergente, bien sûr !

❏ divergente, évidemment !

✔ l'un ou l'autre, faut voir...

Pour appliquer la règle de D'Alembert, il faut d'une part que la suite des quotients u_{n+1}/u_n ait une limite (ce qui n'est pas assuré ici) et d'autre part que la limite de cette suite soit différente de 1 (ce qui n'est pas assuré non plus ici).
On ne peut donc pas conclure.

7.c. On suppose que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell > 1.$$

Dans ces conditions, la série $\sum u_n$ est :

❏ convergente, bien sûr !

✔ grossièrement divergente, évidemment !

❏ ça dépend, faut voir...

C'est la règle de D'Alembert dans le cas divergent.

7.d. On suppose que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1.$$

Dans ces conditions, la série $\sum u_n$ est :

❏ convergente, bien sûr !

✔ grossièrement divergente, évidemment !

❏ divergente, mais pas grossièrement divergente tout de même.

❏ ça dépend, faut voir...

Bien sûr, on ne peut pas appliquer la règle de D'Alembert ici **[7.b]**.
Cela dit, l'hypothèse qui est fait nous dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite* strictement *croissante de réels* strictement *positifs. Il n'y a donc aucune chance que cette suite tende vers* 0 *et la série* $\sum u_n$ *est donc grossièrement divergente.*

8.

On suppose que

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

8.a. Dans ces conditions, la série $\sum u_n$

❏ est grossièrement divergente

✔ est peut-être divergente

✔ est peut-être convergente

La série $\sum u_n$ *est la somme d'une série convergente (CSSA) et d'une série dont la nature est indéterminée (on ne peut pas appliquer le Théorème de comparaison, cf* **[6.b]**).
On ne peut donc pas conclure quant à sa nature.

$\boxed{\textbf{8.b.}}$ Une étude plus précise du terme général nous indique que

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Dans ces conditions, la série $\sum u_n$ est divergente.

✔ Vrai

❏ Faux

❏ On ne peut toujours pas conclure

Si une série $\sum v_n$ vérifie

$$v_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{2}{n}$$

alors elle diverge (Théorème de comparaison par équivalent).
Cette fois, la série $\sum u_n$ est donc la somme d'une série convergente (CSSA) et d'une série divergente, donc elle diverge.

$\boxed{\textbf{8.c.}}$ Le calcul précédent est erroné. En fait, il se trouve que

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^n}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Dans ces conditions, la série $\sum u_n$ est convergente.

❏ Vrai

❏ Faux

✔ On ne peut toujours pas conclure

La série $\sum u_n$ est la somme de deux séries convergentes (CSSA) et d'une série dont la nature est indéterminée **[6.b]**, *donc on ne peut pas conclure.*