Travaux dirigés de Mathématiques

Le 11 septembre 2019

❖ I – Problème ❖

On notera $I = [0, 1]$. Dans tout le problème, f et h sont des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On s'intéresse aux applications de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ qui vérifient l'équation différentielle suivante :

$$-y''(x) + h(x)y(x) = f(x) \tag{E}$$

d'inconnue $y \in \mathscr{C}^2(I)$.

Plus précisément, on cherche les solutions de (E) qui s'annulent en 0 et en 1 (conditions aux limites, aux extrémités du segment I). On s'intéresse donc au système suivant.

$$\begin{cases} \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad -y''(x) + h(x)y(x) = f(x) \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases} \tag{S}$$

Une application $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une **solution de (S)** lorsqu'elle est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et vérifie les équations du système (S).

1. On suppose que l'application h est constante :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \alpha \in \mathbb{R}$$

et que f est l'application nulle :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 0.$$

Démontrer que l'application nulle est la seule solution de (S) sauf pour certaines valeurs du réel α qui seront précisées.

☞ *On posera $\alpha = \omega^2$ si $\alpha > 0$ et $\alpha = -\omega^2$ si $\alpha < 0$.*

2. Soit φ, une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$\Phi(x) = (1-x)\int_0^x t\varphi(t)\,dt + x\int_x^1 (1-t)\varphi(t)\,dt.$$

2. a. Démontrer que l'application Φ ainsi définie est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée seconde, ainsi que $\Phi(0)$ et $\Phi(1)$.

2. b. Soit Φ_1, une application de classe $\mathscr{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \Phi_1''(x) = -\varphi(x)$$

et que $\Phi_1(0) = \Phi_1(1) = 0$. Démontrer que $\Phi(x) = \Phi_1(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3. Démontrer que le système suivant admet une solution et une seule.

$$\begin{cases} \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad -y''(x) = f(x) \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases} \tag{S_0}$$

4. On s'intéresse maintenant au cas particulier suivant, où f est l'application nulle.

$$\begin{cases} \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad -y''(x) + h(x)y(x) = 0 \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases} \tag{S_1}$$

4. a. Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une application continue qui vérifie la relation suivante.

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = (x-1)\int_0^x th(t)y(t)\,dt + x\int_x^1 (t-1)h(t)y(t)\,dt \tag{R}$$

Démontrer que y est de classe $\mathscr{C}^2$ et est une solution de (S_1).

4. b. Réciproquement, démontrer que toute solution y de (S_1) vérifie aussi la relation (R).

4. c. Soit y, une solution de (S_1). Démontrer l'existence des deux réels

$$H = \max_{x\in[0,1]} |h(x)| \quad \text{et} \quad Y = \max_{x\in[0,1]} |y(x)|$$

puis l'encadrement suivant :

$$\forall\, x \in [0, 1], \quad |y(x)| \leqslant \frac{HY}{8}.$$

4. d. En déduire une condition nécessaire sur la fonction h pour qu'il existe des solutions de (S_1) autres que l'application nulle.

4. e. Vérifier que, lorsque h est constante et qu'il existe des solutions de (S_1) autres que l'application nulle, cette condition est satisfaite.

❖ II – Problème ❖

1. Soient E, un espace vectoriel réel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et f, un endomorphisme de E tel que

$$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f.$$

1. a. Démontrer que n est pair et exprimer le rang de f en fonction de n.

1. b. Démontrer que

$$\forall\, x \in E, \quad (f \circ f)(x) = 0.$$

2. Soit $f \in L(E)$ tel que $f \circ f = 0$. On suppose que

$$\dim E = 2 \operatorname{rg} f.$$

Démontrer que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$.

Partie A.

Soit f, un endomorphisme de rang p tel que

$$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f.$$

3. Exprimer la dimension n de E en fonction de p.
4. Soit F, un sous-espace supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$ dans E. On note

$$\mathscr{B}_1 = (e_1, \ldots, e_p) \quad \text{et} \quad \mathscr{B}_2 = (e'_1, \ldots, e'_p)$$

des bases de F et $\operatorname{Ker} f$ respectivement.
4. a. Que dire de la famille

$$\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p, e'_1, \ldots, e'_p) \quad ?$$

4. b. Démontrer que la famille

$$\big(f(e_1), \ldots, f(e_p)\big)$$

est une base de $\operatorname{Im} f$.
4. c. Pour tout entier $1 \leqslant i \leqslant p$, on pose $e_{p+i} = f(e_i)$. Calculer $f(e_{p+i})$.
4. d. Démontrer que la famille

$$\mathscr{B}_0 = (e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_{2p})$$

est une base de E. Écrire la matrice de f relative à cette base.

Partie B.

On considère ici $E = \mathbb{R}^4$ et l'endomorphisme f représenté dans la base canonique de E par la matrice suivante.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$, une base de $\operatorname{Im} f$ et en déduire, sans calcul supplémentaire, la matrice A^2.
6. Démontrer qu'il existe une base $\mathscr{C}$ de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire.
7. Calculer la matrice de passage de la base canonique à une telle base $\mathscr{C}$.

❖ III – Problème ❖

Soit $d \in \mathbb{N}$, fixé. On note $E = \mathbb{R}_d[X]$, l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à d.

On étudie ici l'application S définie par

$$\forall\,(a_0, \ldots, a_d) \in \mathbb{R}^{d+1}, \quad S\left(\sum_{i=0}^{d} a_i X^i\right) = \sum_{i=0}^{d-1} a_{i+1} X^i.$$

On notera I, l'endomorphisme identité de E et U, le sous-espace de $L(E)$ engendré par I, S, …, S^d.

Partie A.

On choisit de représenter le polynôme

$$P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i$$

par la liste

$$A = [a_0, a_1, \ldots, a_d].$$

1. Écrire une fonction `non_nul(A)` qui retourne `True` si, et seulement si, le polynôme représenté par la liste `A` n'est pas le polynôme nul.
2. Écrire une fonction `degre(A)` qui retourne le degré du polynôme représenté par `A` (en supposant que la liste `A` ne représente pas le polynôme nul).
3. Écrire une fonction `Toeplitz(A)` qui retourne la liste représentant le polynôme $S(P)$.

Partie B.

4. Démontrer que S est un endomorphisme de E.
5. Pour $0 \leqslant i \leqslant d$, calculer l'image de X^i par S.
6. Écrire la matrice de S relative à la base

$$\mathscr{B}_0 = (1, X, \ldots, X^d).$$

7. Pour $1 \leqslant k \leqslant d$, écrire la matrice de S^k relative à la base $\mathscr{B}_0$. En déduire que $S^{d+1} = 0$.
8. Soit $u \in L(E)$. Démontrer que u appartient au sous-espace U si, et seulement si, sa matrice

$$B = (b_{i,j})_{0 \leqslant i,j \leqslant d}$$

relative à $\mathscr{B}_0$ est triangulaire supérieure et vérifie

$$\forall\, 0 \leqslant i \leqslant j \leqslant d, \quad b_{i,j} = b_{0,j-i}.$$

9. Démontrer que

$$(I, S, \ldots, S^d)$$

est une famille libre de $L(E)$.
10. Dans cette question, on suppose que $u \in L(E)$ commute à S. Vérifier que

$$\forall\, 0 \leqslant k \leqslant d, \quad u(X^k) = S^{d-k}\big(u(X^d)\big).$$

11. Démontrer que U est l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent à S.

Solution I ✽ Une équation différentielle avec conditions aux limites

1. Remarquons tout d'abord que la fonction nulle est bien solution du système (S). Pour la réciproque, il faut distinguer trois cas.

- Si $\alpha = 0$, alors y'' est nulle sur un intervalle, donc y est une fonction affine. Les conditions aux limites $y(0) = y(1) = 0$ imposent alors $y(x) = 0$ pour tout $x \in [0, 1]$.
- Si $\alpha = \omega^2 > 0$, alors il existe deux réels A et B tels que

$$\forall\, x \in [0, 1], \quad y(x) = A \operatorname{sh} \omega x + B \operatorname{ch} \omega x.$$

La condition aux limites $y(0) = 0$ impose $B = 0$ et la condition $y(1) = 0$ impose alors $A \operatorname{sh} \omega = 0$, donc $A = 0$ (puisque sh ne s'annule qu'à l'origine et que $\omega > 0$). Par conséquent, la fonction y est identiquement nulle sur le segment $[0, 1]$.

- Si $\alpha = -\omega^2 < 0$, alors il existe deux réels A et B tels que

$$\forall\, x \in [0, 1], \quad y(x) = A \sin \omega x + B \cos \omega x.$$

La condition aux limites $y(0) = 0$ impose $B = 0$ et la condition $y(1) = 0$ impose alors

$$A \sin \omega = 0$$

c'est-à-dire $A = 0$ *ou* $\omega = 0 \pmod{\pi}$.

- En conclusion :
  – S'il existe un entier $k \geqslant 1$ tel que $\alpha = -(k\pi)^2$, alors y est une solution du système (S) si, et seulement si, il existe une constante A telle que

$$\forall\, x \in [0, 1], \quad y(x) = A \sin k\pi x.$$

  – Sinon, la seule solution du système (S) est la fonction nulle.

2. a. Comme φ est continue sur $\mathbb{R}$, alors les fonctions

$$[t \mapsto t\varphi(t)] \quad \text{et} \quad [t \mapsto (1-t)\varphi(t)]$$

sont continues sur $\mathbb{R}$ et d'après le Théorème fondamental de l'Analyse, les fonctions

$$\left[x \mapsto \int_0^x t\varphi(t)\, dt\right] \quad \text{et} \quad \left[x \mapsto \int_x^1 (1-t)\varphi(t)\, dt\right]$$

sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et leurs dérivées ont pour expressions respectives :

$$x\varphi(x) \quad \text{et} \quad (x-1)\varphi(x).$$

On en déduit que Φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\begin{aligned}\Phi'(x) &= -\int_0^x t\varphi(t)\, dt + (1-x)x\varphi(x)\\ &\quad + \int_x^1 (1-t)\varphi(t)\, dt + x(x-1)\varphi(x)\\ &= -\int_0^x t\varphi(t)\, dt + \int_x^1 (1-t)\varphi(t)\, dt.\end{aligned}$$

On déduit des remarques précédentes que Φ' est de classe $\mathscr{C}^1$ (c'est-à-dire que Φ est de classe $\mathscr{C}^2$) et que

$$\Phi''(x) = -x\varphi(x) + (x-1)\varphi(x) = -\varphi(x).$$

Par ailleurs, il est clair que $\Phi(0) = \Phi(1) = 0$.

On a ainsi démontré que Φ est une solution du système (S_0).

2. b. Comme Φ et Φ_1 sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, la différence

$$\Delta = \Phi_1 - \Phi$$

est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et comme, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\Delta''(x) = \Phi_1''(x) - \Phi''(x) = -\varphi(x) + \varphi(x) = 0,$$

la fonction Δ est affine. Les conditions aux limites

$$\Delta(0) = \Phi_1(0) - \Phi(0) = 0 \quad \text{et} \quad \Delta(1) = \Phi_1(1) - \Phi(1) = 0$$

imposent alors que Δ est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad \Phi_1(x) = \Phi(x).$$

3. On a démontré que Φ était une solution de (S_0) au **2.a.** et que toute solution de (S_0) était égale à Φ au **2.b.**.

Le système (S_0) admet donc une, et une seule, solution.

4. a. Comme h et y sont des fonctions continues, les fonctions

$$\left[x \mapsto \int_0^x th(t)y(t)\, dt\right] \quad \text{et} \quad \left[x \mapsto \int_x^1 (t-1)h(t)y(t)\, dt\right]$$

sont de classe $\mathscr{C}^1$, donc la fonction y est en fait de classe $\mathscr{C}^1$ et d'après le Théorème fondamental de l'Analyse,

$$\begin{aligned}y'(x) &= \int_0^x th(t)y(t)\, dt + (x-1)xh(x)y(x)\\ &\quad + \int_x^1 (t-1)h(t)y(t)\, dt - x(x-1)h(x)y(x)\\ &= \int_0^x th(t)y(t)\, dt + \int_x^1 (t-1)h(t)y(t)\, dt.\end{aligned}$$

On voit sur cette expression que y' est de classe $\mathscr{C}^1$, donc que y est en fait de classe $\mathscr{C}^2$ et que

$$y''(x) = xh(x)y(x) + (1-x)h(x)y(x) = h(x)y(x).$$

De plus, il est clair que $y(0) = y(1) = 0$, donc y est bien une solution de (S_1).

4. b. Si la fonction y est une solution de (S_1), alors elle est de classe $\mathscr{C}^2$, donc la fonction z définie par

$$z(x) = (x-1)\int_0^x th(t)y(t)\, dt + x\int_x^1 (t-1)h(t)y(t)\, dt$$

est de classe $\mathscr{C}^2$ et, d'après **4.a.**,

$$\forall\, x \in [0, 1], \quad y''(x) - z''(x) = h(x)y(x) - h(x)y(x) = 0,$$

donc la différence $(y - z)$ est affine sur le segment $[0, 1]$.

D'après les conditions aux limites,

$$y(0) = z(0) = 0 \quad \text{et} \quad y(1) = z(1) = 0$$

donc $(y - z)$ est la fonction nulle sur $[0,1]$, ce qui montre que la fonction y vérifie la relation (R).

4. c. Les fonctions h et y sont continues sur le segment $[0,1]$, donc elles sont bornées sur ce segment et atteignent leurs bornes respectives : cela prouve l'existence des réels H et Y.

❧ Soit $x \in [0,1]$.
Pour tout $t \in [0,x]$,

$$\left|th(t)y(t)\right| \leqslant HY\,t$$

et d'après l'inégalité de la moyenne,

$$\left|\int_0^x th(t)y(t)\,dt\right| \leqslant \int_0^x HY\,t\,dt = HY\,\frac{x^2}{2}.$$

Pour tout $t \in [x,1]$,

$$\left|(t-1)h(t)y(t)\right| \leqslant HY\,(1-t)$$

et d'après l'inégalité de la moyenne,

$$\left|\int_x^1 (t-1)h(t)y(t)\,dt\right| \leqslant \int_x^1 HY\,(1-t)\,dt = HY\,\frac{(1-x)^2}{2}.$$

❧ On déduit alors de (R) et de l'inégalité triangulaire que

$$\begin{aligned}\left|y(x)\right| &\leqslant \frac{(1-x)x^2 + (1-x)^2x}{2}\,HY \\ &\leqslant \frac{(1-x)x}{2}\,HY \leqslant \frac{1}{8}\,HY\end{aligned}$$

puisque $0 \leqslant x(1-x) \leqslant 1/4$ pour tout $x \in [0,1]$ (comme chacun devrait savoir).

4. d. En passant au max dans l'encadrement précédent, on obtient

$$Y \leqslant \frac{HY}{8}.$$

Si la fonction y n'est pas identiquement nulle, alors $|y(x)|$ prend des valeurs strictement positives et $Y > 0$. On en déduit alors que

$$H \geqslant 8.$$

Ainsi : pour qu'il existe (au moins) une solution de (S_1) autre que la fonction identiquement nulle, il faut que

$$\exists\, x_0 \in [0,1], \qquad \left|h(x_0)\right| \geqslant 8.$$

4. e. Lorsque h est constante, la résolution de (S_1) a été étudiée au **1.** et on a démontré que, s'il existait des solutions autres que la fonction identiquement nulle, alors il existait un entier $k \geqslant 1$ tel que

$$\forall\, x \in [0,1], \quad h(x) = a = -(k\pi)^2$$

et donc tel que

$$H = k^2\pi^2 \geqslant \pi^2 > 8.$$

La condition nécessaire du **4.d.** est donc bien satisfaite.

Solution II ❁ Noyau et image d'un endomorphisme

1. a. Comme f est un endomorphisme de E, espace vectoriel de dimension finie, on peut appliquer le théorème du rang :

$$\dim E = \dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f = 2 \operatorname{rg} f,$$

ce qui prouve bien que la dimension n de E est *paire*.

1. b. Pour tout $x \in E$, le vecteur $f(x)$ appartient à $\operatorname{Im} f$. Comme $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f$, le vecteur $f(x)$ appartient à $\operatorname{Ker} f$, donc

$$(f \circ f)(x) = f\big(f(x)\big) = 0_E.$$

2. Soit $y \in \operatorname{Im} f$: il existe donc $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Par conséquent,

$$f(y) = (f \circ f)(x) = 0_E$$

ce qui prouve que $y \in \operatorname{Ker} f$. Ainsi $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$.

On applique à nouveau le théorème du rang :

$$2 \operatorname{rg} f = \dim E = \operatorname{rg} f + \dim \operatorname{Ker} f$$

donc $\dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Ker} f$. Par inclusion et égalité des dimensions, les deux sous-espaces vectoriels sont égaux : $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f$.

Partie A.

3. D'après **1.a.**, $n = 2p$.

4. a. Comme $\mathscr{B}_1$ est une base de F, que $\mathscr{B}_2$ est une base de $\operatorname{Ker} f$ et que $E = F \oplus \operatorname{Ker} f$, alors la famille $\mathscr{B}$, obtenue en rassemblant les vecteurs de $\mathscr{B}_1$ et de $\mathscr{B}_2$, est une base de E.

4. b. L'image par f de la base $\mathscr{B}$ est (toujours !) une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$. Comme les vecteurs e'_k appartiennent à $\operatorname{Ker} f$, on en déduit que

$$\big(f(e'_1), \dots, f(e'_p)\big) = (0_E, \dots, 0_E)$$

et par conséquent

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(e),\ e \in \mathscr{B}) = \operatorname{Vect}(f(e_k),\ 1 \leqslant k \leqslant p).$$

La famille $\big(f(e_k)\big)_{1 \leqslant k \leqslant p}$ est donc une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$.

❧ Vérifions maintenant que cette famille est libre : considérons des scalaires $(a_k)_{1 \leqslant k \leqslant p}$ tels que

$$\sum_{k=1}^{p} a_k f(e_k) = 0_E.$$

Par linéarité de f, cela signifie que le vecteur

$$\sum_{k=1}^{p} a_k e_k$$

appartient à $\operatorname{Ker} f$. Or ce vecteur appartient, par définition de $\mathscr{B}_1$, au sous-espace F. Par construction, $\operatorname{Ker} f$ et F sont en somme directe, donc

$$\sum_{k=1}^{p} a_k e_k = 0_E$$

et comme la famille $(e_k)_{1 \leqslant k \leqslant p}$ est libre, on en déduit que les scalaires a_k sont tous nuls : cqfd.

❧ La famille $\big(f(e_k)\big)_{1\leqslant k\leqslant p}$, libre et génératrice, est donc bien une base de $\operatorname{Im} f$.

4. c. Pour $1 \leqslant i \leqslant p$,

$$f(e_{p+1}) = (f\circ f)(e_i) = 0_E$$

puisque $f \circ f$ est l'endomorphisme nul.

4. d. D'après **4.b.**, la famille $\mathscr{B}_2 = (e_{p+1}, \dots, e_{2p})$ est une base de $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f$. D'après **4.a.**, la famille $\mathscr{B}_0 = \mathscr{B}$ est une base de E. Par définition des e_{p+k} et d'après **4.c.**,

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_0}(f) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & & & & & \\ 1 & \ddots & & & & \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{d+1}(\mathbb{R})$$

Partie B.

5. On rappelle que l'image d'une matrice est engendrée par les colonnes de la matrice.

On remarque que les colonnes C_1 et C_2 ne sont pas proportionnelles, donc le rang de A est au moins égal à 2.

D'autre part, $C_1 - C_4 = 0$ et $C_2 - C_3 = 0$, donc les vecteurs $(1, 0, 0, -1)$ et $(0, 1, -1, 0)$ (qui ne sont pas proportionnels) appartiennent au noyau de f, donc la dimension du noyau de f est au moins égale à 2.

D'après le théorème du rang, $4 = \dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rg} f$, donc

$$\dim \operatorname{Ker} f = \operatorname{rg} f = 2$$

et par conséquent

– le couple (C_1, C_2) est une base de $\operatorname{Im} f$;
– le couple $(-C_2, -C_1)$ est une base de $\operatorname{Ker} f$.

En particulier, $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$. D'après **1.b.**, l'application f^2 est l'endomorphisme nul et donc $A^2 = 0$.

6. On a démontré que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$. D'après **4.**, il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est égale à

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et donc triangulaire (inférieure).

7. On a vu plus haut, au **4.d.**, qu'il suffit de choisir $\mathscr{C} = \mathscr{B}_0$.

La matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible (triangulaire avec des coefficients diagonaux tous distincts de 0), ce qui prouve que ses colonnes forment une base de $\mathbb{R}^4$. D'après **5.**, les deux dernières colonnes forment une base de $\operatorname{Ker} f$. Les deux premières colonnes forment donc une base d'un supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$ dans $\mathbb{R}^4$.

Les troisième et quatrième colonnes étant les images respectives des première et deuxième colonne, on en déduit que la matrice P est bien la matrice de passage de la base canonique à une base du type de la base $\mathscr{B}_0$ définie au **4.d.** et répond donc à la question posée.

Solution III ❁ Matrices de Toeplitz

Partie A.

1. Méthode élémentaire : on passe en revue un par un les éléments de la liste `A` et on les compare à 0. On retourne `True` si *au moins une* des comparaisons donne un résultat satisfaisant, ce qui revient à évaluer l'opération booléenne suivante.

$$[a_0 \neq 0] \quad \text{ou} \quad [a_1 \neq 0] \quad \text{ou} \quad \cdots \quad \text{ou} \quad [a_d \neq 0]$$

```
def non_nul(A):
  b = False
  for a in A:
    b = b or (a!=0)
  return b
```

Variante pythonnienne : on transforme la liste en tableau numpy ; en comparant ce tableau à 0, on obtient un tableau de booléens ; on calcule la somme de ce tableau de booléens (avec la convention `True=1` et `False=0`) ; le résultat donne le nombre de coefficients non nuls et le polynôme n'est pas nul si, et seulement si, le nombre de coefficients non nuls est au moins égal à 1.

```
import numpy as np
def non_nul(A):
  tab_coeffs_non_nuls = (np.array(A)>0)
  nb_coeffs_non_nuls = sum(tab_coeffs_non_nuls)
  return (nb_coeffs_non_nuls>0)
```

2. On parcourt la liste `A` du début à la fin. À chaque fois qu'on rencontre un coefficient non nul, on note le degré du monôme. Le degré du dernier coefficient non nul rencontré est alors le degré du polynôme.

```
def degre(A):
  d = 0
  for i in range(len(A)):
    if (A[i]!=0):
      d = i
  return d
```

Variante pythonienne : au lieu de parcourir la liste, on l'énumère, c'est plus léger !

```
def degre(A):
  d = 0
  for i, a in enumerate(A):
    if (a!=0):
      d = i
  return d
```

3. On récupère les coefficients $a_1, \ldots, a_d$ et on complète avec un coefficient nul.

Méthode élémentaire : on définit une liste en compréhension et on ajoute un élément au bout de cette liste.

```
def Toeplitz(A):
  T = [ A[i] for i in range(1, len(A)) ]
  T.append(0)
  return T
```

Variante pythonienne : on coupe une tranche !

```
def Toeplitz(A):
  return A[1:]+[0]
```

Partie B.

4. Tout d'abord, en tant qu'application, S est bien définie sur E puisque chaque polynôme $P \in E$ s'écrit de manière *unique* sous la forme

$$P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k.$$

Ensuite, S est une application de E dans E, car $S(P)$ est bien un polynôme à coefficients réels dont le degré est inférieur ou égal à d.

Enfin, S est bien un endomorphisme de E : il reste à vérifier la linéarité de S, c'est-à-dire

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{R},\ \forall\, P, Q \in E, \quad S(\lambda P + Q) = \lambda S(P) + S(Q)$$

et ce calcul est sans mystère (il doit néanmoins être détaillé sur la copie).

5. Comme

$$X^i = \sum_{k=0}^{d} \delta_{i,k} X^k$$

(en utilisant le symbole de Kronecker), alors

$$S(X^i) = \sum_{k=0}^{d-1} \delta_{i,k+1} X^k = \sum_{k=0}^{d-1} \delta_{i-1,k} X^k$$

(puisque $i = k+1 \iff i-1 = k$). Donc :

- ou bien $i = 0$ et dans ce cas $S(1) = 0$;
- ou bien $1 \leqslant i \leqslant d$ et dans ce cas $S(X^i) = X^{i-1}$.

6. D'après la question précédente,

$$\big(S(1), S(X), S(X^2), \ldots, S(X^d)\big) = (0, 1, X, \ldots, X^{d-1}).$$

On en déduit que la matrice de S relative à la base canonique $\mathscr{B}_0$ de $\mathbb{R}_d[X]$ est la suivante.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{d+1}(\mathbb{R})$$

7. On déduit facilement de la question précédente que

$$\forall\, 0 \leqslant i < k, \quad S^k(X^i) = 0$$

et que

$$\forall\, k \leqslant i \leqslant d, \quad S^k(X^i) = X^{i-k}.$$

La matrice de S^k relative à la base canonique est donc la suivante

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & 1 \\ \vdots & & & & & & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{d+1}(\mathbb{R})$$

(Sur la première ligne, le coefficient 1 apparaît en $(k+1)$-ième position, puisque $S^k(X^k) = 1$.)

8. L'endomorphisme u appartient au sous-espace U si, et seulement si, il existe des réels $\lambda_0, \ldots, \lambda_d$ tels que

$$u = \sum_{k=0}^{d} \lambda_k S^k$$

c'est-à-dire, d'après les questions précédentes, si la matrice de u relative à la base canonique $\mathscr{B}_0$ est égale à

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_k & \cdots & \lambda_d \\ 0 & \ddots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \lambda_k \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \lambda_1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{d+1}(\mathbb{R}).$$

C'est bien ce qu'il fallait démontrer.

9. Soient $\lambda_0, \ldots, \lambda_d$, des réels tels que l'endomorphisme

$$\sum_{k=0}^{d} \lambda_k S^k$$

soit identiquement nul. La matrice relative à la base canonique $\mathscr{B}_0$ de cet endomorphisme est donc la matrice nulle et, d'après la question précédente, la première ligne de cette matrice est

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_d \end{pmatrix}.$$

Donc tous les λ_k sont nuls, ce qui prouve que $(S^k)_{0 \leqslant k \leqslant d}$ est bien une famille libre de $L(E)$.

10. Si l'endomorphisme u commute à l'endomorphisme S, alors il commute à tous les endomorphismes S^{d-k}. En particulier,

$$(u \circ S^{d-k})(X^d) = (S^{d-k} \circ u)(X^d)$$

et d'après **7.**

$$S^{d-k}(X^d) = X^{d-(d-k)} = X^k$$

donc

$$\forall\, 0 \leqslant k \leqslant d, \quad u(X^k) = S^{d-k}\big(u(X^d)\big).$$

11. Tout endomorphisme qui appartient à U est, par définition, un polynôme en S, ce qui prouve qu'il commute à S.

Réciproquement, considérons $u \in L(E)$ qui commute à S. Le vecteur $u(X^d)$ appartient à $\mathbb{R}_d[X]$ et admet donc une décomposition dans la base canonique $\mathscr{B}_0$. Écrivons cette décomposition sous une forme un peu astucieuse :

$$u(X^d) = \sum_{i=0}^{d} \lambda_{d-i} X^i = \sum_{i=0}^{d} \lambda_i X^{d-i}.$$

Comme $u \circ S = S \circ u$, on déduit de la question précédente que

$$u(X^k) = S^{d-k}\Big(\sum_{i=0}^{d} \lambda_i X^{d-i}\Big)$$

et par linéarité de S^{d-k}

$$\begin{aligned} u(X^k) &= \sum_{i=0}^{d} \lambda_i S^{d-k}(X^{d-i}) \\ &= \sum_{i=0}^{k} \lambda_i X^{(d-i)-(d-k)} = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i X^{k-i} \end{aligned}$$

d'après **7.** et donc, toujours d'après **7.**,

$$u(X^k) = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i S^i(X^k) = \sum_{i=0}^{d} \lambda_i S^i(X^k).$$

On a ainsi démontré que les endomorphismes

$$u \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=0}^{d} \lambda_i S^i$$

coïncidaient sur la base canonique $\mathscr{B}_0$, ce qui prouve que ces deux endomorphismes sont égaux. Ainsi

$$u = \sum_{i=0}^{d} \lambda_i S^i \in U.$$

On a bien démontré que le sous-espace U est bien l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent à S.