Travaux dirigés de Mathématiques

Le 22 avril 2020

❖ Problème ❖

On note $\mathscr{C}_{2\pi}$, l'espace vectoriel des fonctions continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$c_k = [t \mapsto \cos kt] \quad \text{et} \quad s_k = [t \mapsto \sin kt].$$

L'espace $\mathscr{C}_{2\pi}$ est muni de la norme, notée $\|\cdot\|_2$, associée au produit scalaire défini par

$$(f \mid g) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,dt.$$

☙ On note E, le sous-espace de $\mathscr{C}_{2\pi}$ constitué des fonctions impaires et E_2, le sous-espace des fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ qui appartiennent à E. Comme E_2 est un sous-espace de E, on dira que $f \in E_2$, non nulle, est un vecteur propre et que $\lambda \in \mathbb{R}$ est la valeur propre de $T \in L(E_2, E)$ associée à f lorsque $T(f) = \lambda f$.

☙ On fixe une fonction q de classe $\mathscr{C}^1$, paire et 2π-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que q n'est pas constante. Dans ces conditions, la fonction q est bornée et

$$a = \inf_{x\in\mathbb{R}} q(x) < \sup_{x\in\mathbb{R}} q(x) = b.$$

On considère alors les applications linéaires de E_2 dans E définies par

$$A(y) = -y''+ay, \quad B(y) = -y''+by, \quad Q(y) = -y''+qy.$$

Partie A. Résultats généraux

Dans cette partie, le réel λ est fixé et on étudie l'équation différentielle

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + \big(\lambda - q(x)\big)y(x) = 0. \qquad (E_\lambda)$$

1. Énoncer le théorème de Cauchy-Lipschitz pour (E_λ).
2. Exploiter l'unicité pour démontrer qu'une solution y de (E_λ) est impaire si, et seulement si, $y(0) = 0$.
3. On rappelle qu'une solution de (E_λ) est, par définition, une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
3. a. Quelle est la structure algébrique de l'ensemble des solutions de (E_λ) ?
3. b. Démontrer, par exemple à l'aide du wronskien, qu'une base de l'espace des solutions de (E_λ) ne peut être constituée de fonctions de même parité.
3. c. En déduire la dimension des sous-espaces propres de Q.
4. Déterminer les valeurs propres de A et de B. Pour chacune d'elles, donner un vecteur propre unitaire.
5. Démontrer que

$$\forall\, f \in E_2, \quad (f \mid A(f)) \leqslant (f \mid Q(f)) \leqslant (f \mid B(f)).$$

Partie B. Problème approché en dimension finie

Dans la suite du problème, on note V_n, le sous-espace de E_2 engendré par s_1, …, s_n et Π_n, la projection orthogonale de E sur V_n. Pour toute application linéaire $T : E_2 \to E$, on notera T_n, l'endomorphisme de V_n défini par $T_n(f) = (\Pi_n \circ T)(f)$.
6. Démontrer que $(s_1, \dots, s_n)$ est une base orthonormée de V_n.
7. Justifier l'existence de Π_n.
8. Démontrer que

$$\forall\, f, g \in E, \quad (f \mid \Pi_n(g)) = (\Pi_n(f) \mid g).$$

9. Démontrer que

$$\forall\, f, g \in E_2, \quad (f \mid Q(g)) = (Q(f) \mid g)$$

puis que Q_n est un endomorphisme symétrique de V_n.

On notera dorénavant $\lambda_1^n \leqslant \lambda_2^n \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n^n$, le système des valeurs propres de Q_n rangées par ordre croissante et $\mathscr{B}_n = (e_1^n, \dots, e_n^n)$, une base orthonormée de V_n telle que

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad Q_n(e_k^n) = \lambda_k^n e_k^n.$$

10. À l'aide de **5.**, démontrer que

$$\forall\, f \in V_n, \quad (f \mid A_n(f)) \leqslant (f \mid Q_n(f)) \leqslant (f \mid B_n(f)).$$

11. Déduire de **4.** les valeurs propres de A_n et de B_n.
12. Soit $1 \leqslant k \leqslant n$. On pose

$$W_k^n = \mathrm{Vect}(e_k^n, e_{k+1}^n, \dots, e_n^n).$$

12. a. Démontrer qu'il existe un vecteur unitaire f appartenant à $V_k \cap W_k^n$. Démontrer alors que

$$\lambda_k^n \leqslant (f \mid Q(f)) \leqslant (f \mid B(f)) \leqslant k^2 + b.$$

12. b. Démontrer de manière analogue que

$$k^2 + a \leqslant \lambda_k^n.$$

13. On suppose ici que $n \geqslant 2$.
13. a. Démontrer que

$$\forall\, f \in V_{n-1}, \quad (f \mid Q_n(f)) = (f \mid Q_{n-1}(f)).$$

13. b. En déduire, en s'inspirant de **12.**, que

$$\forall\, 1 \leqslant k < n, \quad \lambda_k^{n-1} \geqslant \lambda_k^n.$$

14. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_k = [k^2 + a, k^2 + b]$.
14. a. Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la suite $(\lambda_k^n)_{n\geqslant k}$ converge et que sa limite, notée λ_k, appartient à I_k.
14. b. Démontrer que la suite $(\lambda_k)_{k\geqslant 1}$ est croissante.

Solution ❁ Équations différentielles linéaires

Partie A. Résultats généraux

1. L'équation (E_λ) est une équation différentielle linéaire, scalaire, du second ordre, définie sur l'intervalle $I = \mathbb{R}$. Le théorème de Cauchy-Lipschitz nous dit que : pour toute condition initiale

$$(x_0, y_0, v_0) \in \mathbb{R}^3,$$

il existe une, et une seule, fonction $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que

$$f(x_0) = y_0, \qquad f'(x_0) = v_0$$

et qui vérifie (E_λ) :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) + \big(\lambda - q(x)\big)f(x) = 0.$$

2. Toute fonction impaire y (solution, ou non, de (E_λ)) vérifie $y(0) = 0$.

Réciproquement, soit y, une solution de (E_λ) telle que $y(0) = 0$. On pose

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad z(x) = -y(-x).$$

Comme y est de classe $\mathscr{C}^2$, alors z est de classe $\mathscr{C}^2$ et

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad z'(x) = y'(-x), \quad z''(x) = -y''(-x).$$

Or q est une fonction paire, donc

$$\begin{aligned} z''(x) + \big(\lambda - q(x)\big)z(x) &= -y''(-x) - \big(\lambda - q(-x)\big)y(-x) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi, z est une solution de (E_λ). Or

$$z(0) = y(0) = 0 \quad \text{et} \quad z'(0) = y'(0),$$

donc y et z sont deux solutions de (E_λ) associées à la même condition initiale :

$$(t_0, y_0, v_0) = \big(0, 0, y'(0)\big).$$

D'après la question précédente,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad z(x) = y(x)$$

c'est-à-dire

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad -y(-x) = y(x)$$

donc y est impaire.

On a donc démontré que : une solution $y \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de (E_λ) est impaire si, et seulement si, $y(0) = 0$.

3. a. Comme (E_λ) est une équation différentielle linéaire, homogène, scalaire d'ordre deux, l'ensemble des solutions de (E_λ) est un espace vectoriel de dimension 2.

3. b. Soit (f, g), une base de l'espace $\mathcal{S}_\lambda$ des solutions de (E_λ). Son wronskien, défini par

$$W(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix} = f(x)g'(x) - f'(x)g(x),$$

ne s'annule donc en aucun point de $\mathbb{R}$.

❧ Si f et g étaient paires, alors f' et g' seraient impaires, donc W serait impaire et en particulier nulle en $x = 0$.

❧ Si f et g étaient impaires, alors f' et g' seraient paires, donc W serait encore impaire !

Par conséquent, les fonctions f et g ne peuvent être de même parité.

Remarque.— Il est ici inutile d'expliciter le wronskien, mais il est intéressant de voir qu'un calcul *très simple* permet d'y parvenir. Comme f et g sont des solutions de (E_λ),

$$\begin{aligned} W'(x) &= f(x)g''(x) - f''(x)g(x) \\ &= \big(q(x) - \lambda\big)\big[f(x)g(x) - f(x)g(x)\big] = 0 \end{aligned}$$

donc W est une application constante sur $\mathbb{R}$.

3. c. Le sous-espace propre de Q associé à $\lambda \in \mathbb{R}$ est l'ensemble des solutions *impaires* et *2π-périodiques* de l'équation (E_λ). C'est donc un sous-espace vectoriel du *plan $\mathcal{S}_\lambda$* des solutions de (E_λ) et en particulier

$$0 \leqslant \dim \operatorname{Ker}(Q - \lambda I) \leqslant \dim \mathcal{S}_\lambda = 2.$$

Par définition, si λ est une valeur propre de Q, alors la dimension de $\operatorname{Ker}(Q - \lambda I)$ est supérieure à 1.

Si $\dim \operatorname{Ker}(Q - \lambda I)$ était égale à 2, alors toute solution de (E_λ) serait impaire et il existerait une base de $\mathcal{S}_\lambda$ constituée de deux fonctions impaires : par **3.b.**, c'est impossible.

Donc les sous-espaces propres de Q sont tous des droites.

4. On cherche les solutions *impaires* et *2π-périodiques*, *non nulles*, d'une équation différentielle de la forme

$$-y'' + cy = \lambda y,$$

c'est-à-dire de

$$y'' + (\lambda - c)y = 0.$$

Cette équation est archi-connue : on sait donc qu'elle admet des solutions de la forme voulue si, et seulement si, $(\lambda - c)$ est le carré d'un entier non nul et que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, les solutions impaires et 2π-périodiques associées à la valeur propre

$$\lambda_k = c + k^2$$

sont les fonctions proportionnelles à s_k.

Par définition de la norme $\|\cdot\|_2$,

$$\|s_k\|_2^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2 kt \, dt = 1$$

donc s_k est unitaire.

En conclusion, un réel λ est une valeur propre de A (resp. de B) si, et seulement si, il existe un entier $k \geqslant 1$ tel que $\lambda = a + k^2$ (resp. $\lambda = b + k^2$) et, pour tout $k \geqslant 1$, la fonction s_k est un vecteur propre unitaire de A (pour $a + k^2$) et de B (pour $b + k^2$).

5. Par définition de a et b et par positivité de $f^2(t)$,

$$\forall\, t \in [0, 2\pi], \quad af^2(t) \leqslant q(t)f^2(t) \leqslant bf^2(t)$$

donc, par positivité de l'intégrale,

$$a\,(\,f\,|\,f\,) \leqslant (\,f\,|\,qf\,) \leqslant b\,(\,f\,|\,f\,)$$

et donc, par linéarité du produit scalaire par rapport à la deuxième variable,

$$(\,f\,|\,A(f)\,) \leqslant (\,f\,|\,Q(f)\,) \leqslant (\,q\,|\,B(f)\,).$$

Partie B. Problème approché en dimension finie

6. On a déjà vu (au **4.**) que les s_k sont unitaires en tant que vecteurs de l'espace euclidien V_n.

Par ailleurs, si $1 \leqslant i < j \leqslant n$, alors

$$(\, s_i \,|\, s_j \,) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(i-j)t - \cos(i+j)t \, dt = 0,$$

donc $(s_1, \dots, s_n)$ est bien une famille orthonormée.

Comme elle engendre V_n (par définition de V_n), il s'agit d'une base orthonormée de V_n.

7. Comme V_n est un sous-espace de dimension *finie*, la projection orthogonale sur V_n est bien définie. On sait même que

$$\forall\, f \in \mathscr{C}_{2\pi}, \quad \Pi_n(f) = \sum_{k=1}^{n} (\, s_k \,|\, f \,) \cdot s_k$$

puisque $(s_1, \dots, s_n)$ est une base orthonormée de V_n.

8. La bilinéarité du produit scalaire et l'expression de Π_n rappelée à la question précédente montrent que ces deux quantités sont égales à

$$\sum_{k=1}^{n} (\, s_k \,|\, f \,)\,(\, s_k \,|\, g \,).$$

Elles sont donc égales entre elles.

9. Comme f et g appartiennent à E_2, elles sont de classe $\mathscr{C}^2$. En intégrant par parties,

$$\begin{aligned}
(\, Q(f) \,|\, g \,) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} -f''(t)g(t)\,dt + (\, qf \,|\, g \,)\\
&= \frac{1}{\pi}\big[-f'(t)g(t)\big]_0^{2\pi} + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f'(t)g'(t)\,dt\\
&\qquad + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(t)q(t)\,dt\\
&= (\, f' \,|\, g' \,) + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(t)q(t)\,dt
\end{aligned}$$

puisque $g(0) = 0 = g(2\pi)$ (fonction 2π-périodique et impaire). Comme l'expression trouvée est symétrique en f et g, on en déduit que

$$\forall\, f, g \in E_2, \quad (\, f \,|\, Q(g) \,) = (\, Q(f) \,|\, g \,).$$

❧ Tout d'abord, Q_n est bien un endomorphisme de V_n :

$$V_n \xrightarrow{Q} E \xrightarrow{\Pi_n} V_n.$$

Ensuite, comme Π_n est une projection sur V_n, alors

$$\forall\, h \in V_n, \qquad \Pi_n(h) = h.$$

Par conséquent, quels que soient f et g dans V_n,

$$\begin{aligned}
(\, f \,|\, Q_n(g) \,) &= (\, f \,|\, (\Pi_n \circ Q)(g) \,)\\
&= (\, \Pi_n(f) \,|\, Q(g) \,) = (\, f \,|\, Q(g) \,)
\end{aligned}$$

d'après **8.** Ce qui précède permet d'en déduire que

$$\forall\, f, g \in V_n, \quad (\, f \,|\, Q_n(g) \,) = (\, Q_n(f) \,|\, g \,)$$

et donc que Q_n est un endomorphisme symétrique de V_n.

10. Comme $f \in V_n$, alors $f = \Pi_n(f)$ (vu à la question précédente). On déduit alors de **5.** que

$$(\, \Pi_n(f) \,|\, A(f) \,) \leqslant (\, \Pi_n(f) \,|\, Q(f) \,) \leqslant (\, \Pi_n(f) \,|\, B(f) \,).$$

Par **8.**, on obtient alors

$$(\, f \,|\, A_n(f) \,) \leqslant (\, f \,|\, Q_n(f) \,) \leqslant (\, f \,|\, B_n(f) \,),$$

cqfd.

11. Un vecteur propre de A_n est un vecteur propre de A qui appartient à V_n et on a identifié au **4.** tous les vecteurs propres de A. Par conséquent, les vecteurs propres de A_n sont s_1, ..., s_n et les valeurs propres associées sont

$$a+1,\ a+4,\ \dots,\ a+k^2,\ \dots,\ a+n^2.$$

De même, les valeurs propres de B_n sont

$$b+1,\ b+4,\ \dots,\ b+k^2,\ \dots,\ b+n^2.$$

12. a. Par définition, $\dim V_k = k$. Les vecteurs e_k^n, ..., e_n^n forment une famille libre (par hypothèse) de $(n-k+1)$ vecteurs, donc ils engendrent un sous-espace de dimension $(n-k+1)$. Or

$$\begin{aligned}
\dim(V_k + W_k^n) &= \dim V_k + \dim W_k^n - \dim(V_k \cap W_k^n)\\
&= (n+1) - \dim(V_k \cap W_k^n)\\
&\leqslant n
\end{aligned}$$

puisque $V_k + W_k^n$ est contenu dans V_n, espace de dimension n. Ainsi, $V_k \cap W_k^n$ n'est pas réduit à $\{0\}$ et contient donc un vecteur unitaire f.

❧ Il existe donc des scalaires $(\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant k}$ et $(\beta_i)_{k\leqslant i\leqslant n}$ tels que

$$f = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i s_i = \sum_{i=k}^{n} \beta_i e_i^n$$

et (puisqu'on a ainsi décomposé le vecteur *unitaire* f dans deux familles *orthonormées*)

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i^2 = \sum_{i=k}^{n} \beta_i^2 = 1.$$

❧ Comme les e_i^n sont des vecteurs propres de Q,

$$Q(f) = \sum_{i=k}^{n} \lambda_i^n \alpha_i e_i^n$$

et comme $(e_i^n)_{k\leqslant i\leqslant n}$ est orthonormée,

$$(\, f \,|\, Q(f) \,) = \sum_{i=k}^{n} \underbrace{\lambda_i^n}_{\geqslant \lambda_k^n} \alpha_i^2 \geqslant \sum_{i=k}^{n} \lambda_k^n \alpha_i^2 = \lambda_k^n.$$

❧ Par **4.**,

$$B(f) = \sum_{i=1}^{k} (i^2+b)\beta_i s_i$$

et comme $(s_i)_{1\leqslant i\leqslant k}$ est orthonormée,

$$(\, f \,|\, B(f) \,) = \sum_{i=1}^{k} \underbrace{(i^2+b)}_{\leqslant (k^2+b)} \beta_i^2 \leqslant \sum_{i=1}^{k} (k^2+b)\beta_i^2 = k^2+b.$$

❧ Par **5.**,

$$\lambda_k^n \leqslant (\,f\,|\,Q(f)\,) \leqslant (\,f\,|\,B(f)\,) \leqslant k^2 + b.$$

12. b. On applique le même raisonnement aux sous-espaces

$$V^k = \mathrm{Vect}(s_k, \dots, s_n) \quad \text{et} \quad W_1^k = \mathrm{Vect}(e_1^n, \dots, e_k^n)$$

dont les dimensions sont égales à $(n-k+1)$ et k respectivement. Il existe donc un vecteur unitaire g qui appartient à l'intersection de ces deux sous-espaces :

$$g = \sum_{i=k}^{n} \alpha_i s_i = \sum_{i=1}^{k} \beta_i e_i^n$$

et comme plus haut

$$(\,g\,|\,A(g)\,) = \sum_{i=k}^{n} (i^2 + a)\alpha_i^2 \geqslant (k^2 + a)\|g\|_2^2$$

puisque $g \in V^k$ et

$$(\,g\,|\,Q(g)\,) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^n \beta_i^2 \leqslant \lambda_k^n \|g\|_2^2$$

puisque $g \in W_1^k$. On déduit alors de **5.** que

$$k^2 + a \leqslant (\,g\,|\,A(g)\,) \leqslant (\,g\,|\,Q(g)\,) \leqslant \lambda_k^n$$

puisque g est unitaire.

13. a. Si $f \in V_{n-1} \subset V_n$, alors $f = \Pi_n(f) = \Pi_{n-1}(f)$ comme on l'a remarqué au **9.** et, par **8.**,

$$(\,f\,|\,Q_n(f)\,) = (\,\Pi_n(f)\,|\,Q(f)\,) = (\,f\,|\,Q(f)\,)$$
$$(\,f\,|\,Q_{n-1}(f)\,) = (\,\Pi_{n-1}(f)\,|\,Q(f)\,) = (\,f\,|\,Q(f)\,)$$

cqfd.

13. b. Soit $1 \leqslant k < n$. On considère les sous-espaces vectoriels de V_n définis par

$$F_1 = \mathrm{Vect}(e_k^n, \dots, e_n^n),$$
$$F_2 = \mathrm{Vect}(e_1^{n-1}, \dots, e_k^{n-1}).$$

Par hypothèse sur les e_i^j, on a $\dim F_1 = (n-k+1)$ et $\dim F_2 = k$. Or ce sont deux sous-espaces de V_n et $\dim V_n = n$, donc

$$\dim(F_1 \cap F_2) = \dim F_1 + \dim F_2 - \dim(F_1 + F_2) \geqslant 1.$$

Il existe donc un vecteur non nul $f \in F_1 \cap F_2$:

$$f = \sum_{i=k}^{n} \alpha_i e_i^n = \sum_{i=1}^{k} \beta_i e_i^{n-1}$$

et comme $F_2 \subset V_{n-1}$, alors $f \in V_{n-1}$. D'après la question précédente,

$$\sum_{i=k}^{n} \underbrace{\lambda_i^n}_{\geqslant \lambda_k^n} \alpha_i^2 = \sum_{i=1}^{k} \underbrace{\lambda_i^{n-1}}_{\leqslant \lambda_k^{n-1}} \beta_i^2.$$

Comme les familles $(e_i^{n-1})_{1\leqslant i\leqslant k}$ et $(e_i^n)_{k\leqslant i\leqslant n}$ sont orthonormées, on en déduit que

$$\lambda_k^n \|f\|_2^2 \leqslant \lambda_k^{n-1} \|f\|_2^2$$

et comme $f \neq 0$, alors $\|f\|_2 > 0$ et $\lambda_k^n \leqslant \lambda_k^{n-1}$.

14. a. D'après la question précédente, la suite $(\lambda_k^n)_{n\geqslant k}$ est croissante et d'après **12.**, elle est bornée :

$$\forall\, n \geqslant k, \quad k^2 + a \leqslant \lambda_k^n \leqslant k^2 + b.$$

Elle est donc convergente et, comme les inégalités larges sont conservées par passage à la limite,

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad k^2 + a \leqslant \lambda_k \leqslant k^2 + b.$$

14. b. D'après **13.b.** et la définition des λ_i^j,

$$\forall\, 2 \leqslant k < n, \quad \lambda_k^{n-1} \geqslant \lambda_k^n \geqslant \lambda_{k-1}^n.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on en déduit que

$$\forall\, 2 \leqslant k, \qquad \lambda_k \geqslant \lambda_{k-1}$$

et donc que $(\lambda_k)_{k\geqslant 1}$ est croissante.

Remarque.— On peut démontrer que les λ_k sont les valeurs propres de Q et qu'il existe une famille totale orthonormale $(e_k)_{k\geqslant 1}$ de vecteurs propres de Q associée à ces valeurs propres : pour toute fonction $f \in E_2$, il existe une suite réelle $(\alpha_k)_{k\geqslant 1}$ telle que

$$\Big\| f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot e_k \Big\|_2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$