Réduction des endomorphismes — avril 2020

1.

La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

admet -2 pour valeur propre.

❍ Vrai ❍ Faux

2.

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2.a. La matrice A admet 1 pour valeur propre.

❍ Vrai ❍ Faux

2.b. La matrice A admet 0 pour valeur propre.

❍ Vrai ❍ Faux

2.c. La matrice A est inversible.

❍ Vrai ❍ Faux

2.d. La matrice A est diagonalisable.

❏ Bien sûr que non !

❏ Oui, ça se voit !

❏ Je ne sais pas, il faudrait poser le calcul.

2.e. Le degré du polynôme minimal de A est égal à 2.

❏ Bien sûr que non !

❏ Oui, ça se voit !

❏ Je ne sais pas, il faudrait poser le calcul.

2.f. Les matrices I_3, A, A^2 et A^3 sont linéairement indépendantes.

❏ Bien sûr que non !

❏ Oui, bien sûr !

❏ Je ne sais pas, il faudrait poser le calcul.

3.

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\textbf{3.a.}}$ La matrice A est inversible.

❍ Vrai ❍ Faux

$\boxed{\textbf{3.b.}}$ La matrice A est diagonalisable.

❍ Vrai ❍ Faux

$\boxed{\textbf{3.c.}}$ Le rang de A est égal

- ❏ à 0
- ❏ à 1
- ❏ à 2
- ❏ à 3

$\boxed{\textbf{3.d.}}$ Le polynôme minimal de A est égal

- ❏ à $X^2(X-2)$
- ❏ à $X(X-2)$
- ❏ à $X(X+2)$
- ❏ à $X^2(X-1)$

$\boxed{\textbf{3.e.}}$ Le polynôme caractéristique de A est égal

- ❏ à $X^2(X-2)$
- ❏ à $X(X-2)$
- ❏ à $X(X-2)^2$
- ❏ à $X^2(X-1)$

4.

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que

$$A^2 = -I_n.$$

$\boxed{\textbf{4.a.}}$ La matrice A est inversible.

❍ Vrai ❍ Faux

$\boxed{\textbf{4.b.}}$ La matrice A est diagonalisable.

❍ Vrai ❍ Faux

$\boxed{\textbf{4.c.}}$ La série $\sum A^k$ est divergente.

❍ Vrai ❍ Faux

5.

On considère

$$D = [u \longmapsto u']$$

comme un endomorphisme de $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$.

5.a. Le spectre de D est

- ❏ vide
- ❏ fini, non vide
- ❏ infini dénombrable
- ❏ infini non dénombrable

5.b. L'endomorphisme D

- ❏ possède un polynôme minimal
- ❏ possède un polynôme annulateur, mais pas de polynôme minimal
- ❏ n'a pas de polynôme annulateur.

5.c. Soient $n \geqslant 2$, un entier et

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_n$$

des nombres réels. Si

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \alpha_1 e^{a_1 t} + \alpha_2 e^{a_2 t} + \cdots + \alpha_n e^{a_n t} = 0,$$

alors $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.

- ❏ Oui, évidemment !
- ❏ Bien sûr que non !
- ❏ Il faudrait que je prenne le temps de poser les calculs.

5.d. On suppose que la relation précédente est vraie pour tout $t \in [0, 1]$ (et non plus pour tout $t \in \mathbb{R}$). La conclusion est encore vraie.

❍ Vrai ❍ Faux

5.e. On considère une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \varepsilon_n = \pm 1$$

et la fonction f définie par

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n e^{-nt}.$$

Cette fonction f est définie

- ❏ sur $\mathbb{R}$ tout entier
- ❏ sur $\mathbb{R}_+$
- ❏ sur $\mathbb{R}_+^*$

5.f. Avec un bon choix des coefficients ε_n, la fonction f définie à la question précédente peut être identiquement nulle sur $[1, +\infty[$.

- ❏ Vrai
- ❏ Faux
- ❏ Ça peut se déduire de ce qui précède.
- ❏ Aucun rapport avec ce qui précède !