MPSI 2 – Semaine 24

A. On considère la matrice

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$$

et la matrice écrite par blocs

$$A_2 = \begin{pmatrix} A_1 & 0_2 \\ 0_2 & 2A_1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_4(\mathbb{R}).$$

A - 1. Calculer A_1^2 et vérifier que la famille

$$(I_2, A_1, A_1^2)$$

est liée. En déduire un polynôme annulateur de A_1 qui soit unitaire et de degré 2.

A - 2. Démontrer que la famille

$$(I_2, A_1)$$

est libre, puis que

$$P_0 = X^2 - 3X + 5$$

est l'unique polynôme annulateur de A_1 qui soit unitaire et de degré 2.

A - 3. Démontrer que la matrice A_1 est inversible et calculer son inverse.

A - 4. Trouver un polynôme annulateur de $2A_1$, qui soit aussi unitaire et de degré 2.

A - 5. Démontrer que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad A_2^k = \begin{pmatrix} A_1^k & 0_2 \\ 0_2 & 2^k A_1^k \end{pmatrix}.$$

En déduire un polynôme annulateur de A_2.

A - 6. Démontrer que A_2 est inversible et calculer son inverse.

⋆

B.

B - 1. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}).$$

Démontrer que A est inversible et calculer son inverse.

B - 2. On considère la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$$

et la matrice écrite par blocs

$$M = \begin{pmatrix} B & B \\ 2B & B \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_4(\mathbb{R}).$$

B - 2.a. Démontrer que B est inversible et calculer son inverse.

B - 2.b. Calculer le produit de la matrice M par la matrice

$$\begin{pmatrix} -B' & B' \\ 2B' & -B' \end{pmatrix}$$

où $B' \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.

En déduire que la matrice M est inversible et donner son inverse.

B - 3. On considère maintenant la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$$

et la matrice écrite par blocs

$$M = \begin{pmatrix} C & C \\ 2C & C \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_4(\mathbb{R}).$$

B - 3.a. Démontrer que le rang de la matrice M est au moins égal à 2.

B - 3.b. Étant donnés deux matrices colonnes

$$X_1, X_2 \in \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$$

on construit une matrice colonne

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{4,1}(\mathbb{R}).$$

Démontrer que $MX = 0$ si, et seulement si,

$$CX_1 = CX_2 = 0.$$

B - 3.c. En déduire que

$$\dim \operatorname{Ker} M \geqslant 2$$

et conclure.

⋆

C.

C - 1. On considère ici la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$$

ainsi que la matrice écrite par blocs

$$M = \begin{pmatrix} A \\ I_3 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{6,3}(\mathbb{R}).$$

C - 1.a. En effectuant des opérations de pivot sur les colonnes, démontrer que la matrice M est équivalente à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & * & * \\ 1 & * & * \\ 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$$

puis qu'elle est équivalente à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & * & 0 \\ 1 & * & 0 \\ 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}.$$

C - 1.b. Démontrer *sans aucun calcul supplémentaire* qu'il existe une matrice inversible $Q \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que

$$AQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer le produit MQ et identifier cette matrice Q.

C - 1.c. On note V_1, V_2 et V_3, les colonnes de la matrice Q. Vérifier que $AV_3 = 0$ et que le couple

$$(AV_1, AV_2)$$

est une base de l'image de A. De quel théorème célèbre peut-on rapprocher ces propriétés ?

C - 2. On étudie maintenant la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'après le Cours, la connaissance d'un polynôme annulateur de B permet de prouver que B est inversible et de calculer l'inverse de B.

Dans un premier temps, on prouve que B est inversible avec l'algorithme du pivot. On verra ensuite qu'un polynôme annulateur de B n'est pas simple à calculer et que le calcul de B^{-1} par ce biais serait sans doute plus compliqué que par l'algorithme du pivot.

C - 2.a. Par des opérations de pivot sur les colonnes, démontrer que la matrice

$$M = \begin{pmatrix} B \\ I_3 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{6,3}(\mathbb{R})$$

est équivalente à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & * & * \\ 1 & * & * \\ 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$$

puis à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

et enfin à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}.$$

C - 2.b. En interprétant ces opérations de pivot par un produit matriciel, démontrer que la matrice B est inversible et donner son inverse.

C - 2.c. Vérifier que

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 9 & 8 & 13 \\ 6 & 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

En déduire que la famille

$$(E_1, BE_1, B^2E_1)$$

est libre, où E_1 est le premier vecteur de la base canonique.

C - 2.d. En déduire qu'il n'existe pas de polynôme annulateur de B dont le degré soit égal à 2.

$\star$

D. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

D - 1. Calculer trois réels a, b et c tels que

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$$

puis exprimer A^2 en fonction de A.

D - 2. On suppose que $AX = X$. En multipliant par A, en déduire que $AX = 0$, puis que $X = 0$. Que peut-on en conclure sur la matrice

$$B = A - I_3 \quad ?$$

D - 3. Exprimer B^2 en fonction de A et de I_3. En déduire une expression de B^2 en fonction de B et de I_3, puis une expression de B^{-1} en fonction de B et I_3.

⋆

E. On considère les matrices

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

E - 1. Démontrer (sans calcul !) que L et U sont inversibles et calculer leurs inverses.

E - 2. Calculer les matrices $A = LU$ et $B = UL$. Démontrer (sans calcul !) qu'elles sont inversibles et calculer leurs inverses.