# Réduction des endomorphismes — avril 2020

*Les questions indexées par des numéros différents sont indépendantes.*

**1.**

La matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$
admet $-2$ pour valeur propre.

● Vrai ❍ Faux

*D'après la troisième colonne de $A$, la colonne*
$$E_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
*est un vecteur propre de $A$ associé à $-2$.*

**2.**

On considère la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

**2.a.** La matrice $A$ admet $1$ pour valeur propre.

● Vrai ❍ Faux

*D'après la première ligne de $A$, la colonne*
$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
*est un vecteur propre de ${}^tA$ associé à la valeur propre $1$. Or $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}({}^tA)$, donc $1$ est bien une valeur propre de $A$.*

**2.b.** La matrice $A$ admet $0$ pour valeur propre.

● Vrai ❍ Faux

*Les deux dernières colonnes de $A$ sont égales, donc la matrice*
$$A = A - 0 \cdot I_n$$
*n'est pas inversible et $0$ est bien une valeur propre de $A$.*

**2.c.** La matrice $A$ est inversible.

❍ Vrai ● Faux

*On vient d'expliquer pourquoi elle n'est pas inversible !*

**2.d.** La matrice $A$ est diagonalisable.

❏ Bien sûr que non !

✔ Oui, ça se voit !

❏ Je ne sais pas, il faudrait poser le calcul.

*On connaît déjà deux valeurs propres : $0$ et $1$. La trace de $A$, égale à $4$, nous dit que*

$$3 = \operatorname{tr} A - (0+1)$$

*est aussi valeur propre de $A$.*
*Comme $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ admet trois valeurs propres distinctes, la matrice $A$ est diagonalisable.*

**2.e.** Le degré du polynôme minimal de $A$ est égal à 2.

✔ Bien sûr que non !

❏ Oui, ça se voit !

❏ Je ne sais pas, il faudrait poser le calcul.

*Le calcul de $\operatorname{tr}(A)$ nous a montré que $A$ possèdait trois valeurs propres distinctes, qui sont les racines du polynôme minimal. Donc le polynôme minimal de $A$ est égal à*

$$X(X-1)(X-3)$$

*et son degré est égal à $3$.*

**2.f.** Les matrices $I_3$, $A$, $A^2$ et $A^3$ sont linéairement indépendantes.

✔ Bien sûr que non !

❏ Oui, bien sûr !

❏ Je ne sais pas, il faudrait poser le calcul.

*Oublions un instant qu'on* connaît *le polynôme minimal de $A$...*
*Comme $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$, le degré de son polynôme minimal est au plus égal à 3 donc la famille*

$$(I_3,\ A,\ A^2,\ A^3)$$

*est nécessairement liée.*

---

**3.**

---

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**3.a.** La matrice $A$ est inversible.

❍ Vrai ● Faux

*D'après la deuxième colonne de $A$, la colonne*

$$E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

*est un vecteur propre de $A$ associé à $0$ et $A$ n'est donc pas inversible.*

**3.b.** La matrice $A$ est diagonalisable.

● Vrai ❍ Faux

*La matrice $A$ est symétrique réelle, donc diagonalisable.*

**3.c.** Le rang de $A$ est égal

❏ à $0$

✔ à $1$

❏ à $2$

❏ à $3$

*Comme $A \neq 0_3$, le rang de $A$ n'est pas nul.*
*Les colonnes de $A$ sont liées par les relations*

$$C_2 = 0 \cdot C_1 \quad \textit{et} \quad C_3 = -C_1$$

*donc le rang de $A$ est égal à $1$.*

**3.d.** Le polynôme minimal de $A$ est égal

❏ à $X^2(X-2)$

✔ à $X(X-2)$

❏ à $X(X+2)$

❏ à $X^2(X-1)$

*Comme $A$ est diagonalisable, son polynôme minimal est scindé à racines simples et ses racines sont les valeurs propres de $A$.*
*On sait que $0$ est valeur propre double et que la trace de $A$ est égale à 2. Donc*

$$\mathrm{Sp}(A) = \{0;\ 2\}$$

*et par conséquent*

$$\mu_A = X(X-2).$$

**3.e.** Le polynôme caractéristique de $A$ est égal

✔ à $X^2(X-2)$

❏ à $X(X-2)$

❏ à $X(X-2)^2$

❏ à $X^2(X-1)$

*Comme $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$, le polynôme caractéristique de $A$ est un polynôme unitaire de degré $3$.*
*De plus, le sous-espace propre associé à $0$ est de dimension 2 et 2 est valeur propre de $A$, donc $\chi_A$ est divisible par*

$$(X-0)^2 \quad \textit{et par} \quad (X-2)^1.$$

*Donc $\chi_A = X^2(X-2)$.*

**4.**

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que

$$A^2 = -I_n.$$

**4.a.** La matrice $A$ est inversible.

● Vrai ❍ Faux

*L'hypothèse faite sur $A$ nous dit que*

$$P_0 = X^2 + 1$$

*est un polynôme annulateur de $A$. Comme les valeurs propres de $A$ sont toutes des racines de $P_0$, on voit en particulier que $0$ n'est pas valeur propre de $A$ et donc que $A$ est inversible.*

**4.b.** La matrice $A$ est diagonalisable.

❍ Vrai ● Faux

*Le polynôme minimal de $A$ divise $P_0$ et n'est donc pas scindé sur $\mathbb{R}[X]$. Comme $A$ est considérée comme une matrice à coefficients* réels*, elle n'est pas diagonalisable. En revanche, le polynôme annulateur $P_0$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}[X]$ (ses racines sont $\pm i$), donc $A$ serait diagonalisable* ***si*** *l'énoncé l'avait présentée comme une matrice à coefficients complexes.*

**4.c.** La série $\sum A^k$ est divergente.

● Vrai ❍ Faux

*Quel que soit $p \in \mathbb{N}$, on a*

$$A^{4p} = I_n$$

*donc $\|A^{4p}\|$ ne dépend pas de $p$, ce qui prouve que la suite*

$$(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$$

*ne tend pas vers $0_n$ (quelle que soit la norme choisie sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$) et la série $\sum A^k$ est donc grossièrement divergente.*

**5.**

On considère

$$D = [u \longmapsto u']$$

comme un endomorphisme de $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$.

**5.a.** Le spectre de $D$ est

❏ vide

❏ fini, non vide

❏ infini dénombrable

✔ infini non dénombrable

*Un réel $\lambda$ est une valeur propre de $D$ si, et seulement si, l'équation $D(u) = \lambda u$, c'est-à-dire l'équation différentielle*

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad u'(t) - \lambda u(t) = 0$$

*admet au moins une solution non nulle. Le spectre de $D$ est donc égal à $\mathbb{R}$.*

**5.b.** L'endomorphisme D

- ❏ possède un polynôme minimal
- ✔ possède un polynôme annulateur, mais pas de polynôme minimal
- ❏ n'a pas de polynôme annulateur.

*Tout endomorphisme possède au moins un polynôme annulateur : le polynôme nul.*
*Les racines du polynôme minimal sont les valeurs propres de l'endomorphisme. Comme D possède une infinité de valeurs propres et qu'un polynôme unitaire n'a qu'un nombre fini de racines, l'endomorphisme D n'a pas de polynôme minimal.*

**5.c.** Soient $n \geqslant 2$, un entier et

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_n$$

des nombres réels. Si

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \alpha_1 e^{a_1 t} + \alpha_2 e^{a_2 t} + \cdots + \alpha_n e^{a_n t} = 0,$$

alors $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.

- ✔ Oui, évidemment !
- ❏ Bien sûr que non !
- ❏ Il faudrait que je prenne le temps de poser les calculs.

*Pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'application $[t \mapsto e^{at}]$ est un vecteur propre de D associé à la valeur propre $a$.*
*On sait que des vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes sont linéairement indépendants.*

**5.d.** On suppose que la relation précédente est vraie pour tout $t \in [0, 1]$ (et non plus pour tout $t \in \mathbb{R}$).
La conclusion est encore vraie.

● Vrai ❍ Faux

*Le même raisonnement s'applique à D considéré cette fois comme un endomorphisme de $\mathscr{C}^\infty([0, 1])$.*

**5.e.** On considère une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \varepsilon_n = \pm 1$$

et la fonction f définie par

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n e^{-nt}.$$

Cette fonction f est définie

- ❏ sur $\mathbb{R}$ tout entier
- ❏ sur $\mathbb{R}_+$
- ✔ sur $\mathbb{R}_+^*$

*La série de fonctions diverge grossièrement sur $\mathbb{R}_-$.*
*Pour tout $t > 0$, on a $|\varepsilon_n e^{-nt}| = (e^{-t})^n$ avec $0 < e^{-t} < 1$ (série géométrique). Donc la série de fonctions converge absolument sur $\mathbb{R}_+^*$.*

**5.f.** Avec un bon choix des coefficients $\varepsilon_n$, la fonction $f$ définie à la question précédente peut être identiquement nulle sur $[1, +\infty[$.

❏ Vrai

✔ Faux

❏ Ça peut se déduire de ce qui précède.

✔ Aucun rapport avec ce qui précède !

*Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application*

$$u_n = \left[t \mapsto e^{-nt}\right]$$

*est bien un vecteur propre de $D$, associé à la valeur propre $n$.*
*Comme les $\varepsilon_n$ ne sont pas nuls, la somme*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n e^{-nt}$$

*n'est pas une combinaison linéaire de vecteurs propres. On ne peut donc plus invoquer l'indépendance linéaire des vecteurs propres associées à des valeurs propres deux à deux distinctes.*
❧ *La fonction définie par*

$$\forall\, z \in \left]-1, 1\right[, \qquad S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n z^n$$

*est la somme d'une série entière dont le rayon de convergence est égal à 1 et*

$$\forall\, t \in [1, +\infty[, \qquad f(t) = S(e^{-t}).$$

*Si $f$ était identiquement nulle sur $[0, 1[$, alors $S$ serait identiquement nulle sur $\left]0, e^{-1}\right]$ et par unicité du développement en série entière* **[Ch.12 - 50.2]**, *il faudrait alors que tous les $\varepsilon_n$ soient nuls.*