Séries entières - avril 2020

1.

Si le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n t^n$ est strictement positif et fini, alors il est égal à 1.

❍ Vrai ❍ Faux

2.

On suppose que la série entière $\sum a_n t^n$ converge normalement sur tout segment

$$[-r, r] \subset]-1, 1[\,.$$

❏ La série converge normalement sur $]-1, 1[$.

❏ La série converge absolument sur $]-1, 1[$.

❏ Le rayon de convergence est égal à 1.

❏ La série converge uniformément sur $]-1, 1[$.

3.

On suppose que la série entière $\sum a_n t^n$ converge pour $t = 1$ et pour $t = -1$.

3.a. Le rayon de convergence est

❏ au moins égal à 1

❏ égal à 1

❏ au plus égal à 1

3.b. La série converge normalement

❏ sur $[-1, 1]$

❏ sur $]-1, 1[$

❏ sur $[0, 3/4]$

4.

On suppose que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n t^n$ est infini.

4.a. Pour tout $q > 0$, on a

$$a_n = o(q^n)$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

❍ Vrai ❍ Faux

4.b. La série entière converge

- ❏ normalement sur tout compact de $\mathbb{R}$
- ❏ uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$
- ❏ normalement sur tout intervalle ouvert $]-A, A[$
- ❏ uniformément sur $\mathbb{R}$
- ❏ absolument sur $\mathbb{R}$

5.

On considère une fonction f développable en série entière au voisinage de l'origine

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$$

où les coefficients a_n vérifient la relation de récurrence

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad (n+1)a_{n+1} + (n-3)a_{n-1} = 0. \qquad \text{(R)}$$

5.a. On en déduit que, pour tout $t > 0$,

$$\forall\, p \geqslant 1, \quad a_{2p+1}t^{2p+1} = \frac{-(2p-3)t^2}{2p+1} \cdot a_{2p-1}t^{2p-1}.$$

❍ Vrai ❍ Faux

5.b. Si $a_1 \neq 0$ et si $t > 0$, alors le quotient

$$\left| \frac{a_{2p+1}t^{2p+1}}{a_{2p-1}t^{2p-1}} \right|$$

tend t^2.

❍ Vrai ❍ Faux

5.c. Si $a_1 \neq 0$, alors la série

$$\sum a_{2p+1}t^{2p+1}$$

converge absolument si, et seulement si, $|t| < 1$.

- ❏ Oui, c'est la règle de D'Alembert !
- ❏ Mais non, c'est clairement faux !
- ❏ Ptêt ben, j'en jurerais pas...

5.d. Le rayon de convergence de la série entière

$$\sum a_{2p+1}t^{2p+1}$$

est

- ❏ inférieur à 1
- ❏ égal à 1
- ❏ supérieur à 1

$\boxed{\textbf{5.e.}}$ Pour tout $t > 0$,

$$\forall\, p \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{2p+2}t^{2p+2}}{a_{2p}t^{2p}} = \frac{-(2p-2)t^2}{2p+2}.$$

❍ Vrai ❍ Faux

$\boxed{\textbf{5.f.}}$ Pour tout $a_0 \in \mathbb{R}$, le rayon de convergence de la série entière

$$\sum a_{2p}t^{2p}$$

est

- ❑ strictement positif
- ❑ égal à 1
- ❑ supérieur à 1
- ❑ infini

6.

On considère une fonction f développable en série entière au voisinage de l'origine

$$\forall\, t \in \left]-\alpha, \alpha\right[, \quad f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$$

où les coefficients a_n vérifient la relation de récurrence

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad (n^2-1)(a_n - a_{n-1}) = 0. \qquad \text{(R)}$$

$\boxed{\textbf{6.a.}}$ L'ensemble C des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient la relation (R) est un espace vectoriel.

❍ Vrai ❍ Faux

$\boxed{\textbf{6.b.}}$ L'application $\varphi : C \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall\, a \in C, \qquad \varphi(a) = a_0$$

- ❑ est linéaire
- ❑ n'est pas linéaire
- ❑ est injective
- ❑ n'est pas injective

6.c. La dimension de l'espace C est égale

❏ à 0

❏ à 1

❏ à 2

On suppose que la fonction x définie par

$$\forall\, t \in \,]-R, R[, \quad x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$$

est une solution développable en série entière de l'équation différentielle

$$t^2(1-t)x''(t) + t(1-3t)x'(t) - x(t) = 0. \qquad \text{(E)}$$

On peut en déduire que

$$-a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (n^2-1)(a_n - a_{n-1})t^n = 0$$

pour tout $t \in \,]-R, R[$.

6.d. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation (R).

❍ Vrai ❍ Faux

6.e. La coefficient a_0 est

❏ égal à 1

❏ égal à 0

❏ quelconque

6.f. Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n t^n$ est alors

❏ nul

❏ infini

❏ supérieur à 1

❏ égal à 1

6.g. Toute solution de l'équation différentielle (E) sur $]0, 1[$ est de la forme

$$x(t) = a_1 \sum_{n=1}^{+\infty} t^n.$$

❏ Oui, bien sûr !

❏ Il est clair que non !

❏ Je ne sais pas, il faudrait poser les calculs.

6.h. Toute solution de l'équation différentielle (E) sur $]-1, 1[$ est de la forme

$$x(t) = a_1 \sum_{n=1}^{+\infty} t^n.$$

❏ Oui, bien sûr !

❏ Il est clair que non !

❏ Je ne sais pas, il faudrait poser les calculs.