Séries entières - avril 2020

Les questions indexées par des numéros différents sont indépendantes.

1.

Si le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n t^n$ est strictement positif et fini, alors il est égal à 1.

❍ Vrai ● Faux

C'est souvent le cas dans les exercices, mais c'est faux : les rayons de convergence des séries entières

$$\sum 2^n t^n \qquad \text{et} \qquad \sum \frac{t^n}{2^n}$$

sont respectivement égaux à $1/2$ et à 2.

2.

On suppose que la série entière $\sum a_n t^n$ converge normalement sur tout segment

$$[-r, r] \subset]-1, 1[.$$

- ❏ La série converge normalement sur $]-1, 1[$.
- ✔ La série converge absolument sur $]-1, 1[$.
- ❏ Le rayon de convergence est égal à 1.
- ❏ La série converge uniformément sur $]-1, 1[$.

La convergence normale sur $[-r, r]$ entraîne la convergence uniforme et la convergence absolue sur $[-r, r]$.
❧ *Comme la convergence absolue est une propriété ponctuelle, on peut en déduire la convergence absolue sur*

$$\bigcup_{0<r<1} [-r, r] =]-1, 1[.$$

En particulier, le rayon de convergence est au moins égal à 1.
❧ *On n'a aucune information sur le comportement de la série pour $|t| \geqslant 1$, il est donc impossible d'en déduire que $R \leqslant 1$.*
❧ *Au contraire de la convergence absolue, la convergence uniforme (de même que la convergence normale) est une propriété globale, on ne peut donc pas en déduire que la série converge uniformément sur $]-1, 1[$.*

3.

On suppose que la série entière $\sum a_n t^n$ converge pour $t = 1$ et pour $t = -1$.

3.a. Le rayon de convergence est

✔ au moins égal à 1

❏ égal à 1

❏ au plus égal à 1

[Ch.12 - 10] *Si la série numérique $\sum a_n t_0^n$ converge, alors le rayon de convergence est au moins égal à $|t_0|$.*
Sans informations supplémentaires, il est impossible d'en déduire qu'il ne peut pas être strictement plus grand que $|t_0|$.
En effet, pour connaître la valeur exacte du rayon de convergence, il faut savoir pour quelles valeurs de t le terme général tend vers 0 et pour quelles valeurs de t il ne tend pas vers 0.

3.b. La série converge normalement

❏ sur $[-1, 1]$

❏ sur $]-1, 1[$

✔ sur $[0, 3/4]$

Si le rayon de convergence est égal à $R > 0$, alors la série entière converge normalement sur tout segment

$$[\alpha, \beta] \subset]-R, R[.$$

[Ch.11 - 84] *Comme on ne sait pas si $\sum a_n$ converge absolument, rien ne prouve que notre série converge normalement sur $[-R, R]$.*

REMARQUE.— *On rappelle que, pour une série entière, la convergence normale sur $[-R, R]$ équivaut à la convergence normale sur $]-R, R[$.*

4.

On suppose que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n t^n$ est infini.

4.a. Pour tout $q > 0$, on a

$$a_n = o(q^n)$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

● Vrai ❍ Faux

Pour tout $q > 0$, on pose $r = 1/q > 0$. Comme le rayon de convergence est infini, la série $\sum a_n r^n$ est donc absolument convergente et en particulier son terme général tend vers 0.

4.b. La série entière converge

✔ normalement sur tout compact de $\mathbb{R}$

✔ uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$

✔ normalement sur tout intervalle ouvert $]-A, A[$

❏ uniformément sur $\mathbb{R}$

✔ absolument sur $\mathbb{R}$

On sait **[Chap.12 - 38.2]** *que la série entière converge normalement (et donc simplement, absolument et uniformément) sur tout disque fermé contenu dans le disque ouvert de convergence (= $\mathbb{C}$ en l'occurence).*
L'intersection d'un disque fermé avec la droite $\mathbb{R}$ est un segment. On sait donc qu'il y a convergence normale sur tout segment

$$[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}.$$

Tout compact est borné, donc tout compact de $\mathbb{R}$ est contenu dans un segment.
De même, tout intervalle ouvert $]-A, A[$ est contenu dans le segment $[-A, A]$.
❧ On peut démontrer que les seules séries entières qui convergent uniformément sur $\mathbb{R}$ sont celles dont les coefficients sont tous nuls à partir d'un certain rang : ce sont celles dont la somme est une fonction polynomiale.

5.

On considère une fonction f développable en série entière au voisinage de l'origine

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$$

où les coefficients a_n vérifient la relation de récurrence

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad (n+1)a_{n+1} + (n-3)a_{n-1} = 0. \qquad \text{(R)}$$

5.a. On en déduit que, pour tout $t > 0$,

$$\forall\, p \geqslant 1, \quad a_{2p+1}t^{2p+1} = \frac{-(2p-3)t^2}{2p+1} \cdot a_{2p-1}t^{2p-1}.$$

● Vrai ❍ Faux

On prend $n = 2p$ et on multiplie par $t^{2p+1} = t^2 \cdot t^{2p-1}$.

5.b. Si $a_1 \neq 0$ et si $t > 0$, alors le quotient

$$\left|\frac{a_{2p+1}t^{2p+1}}{a_{2p-1}t^{2p-1}}\right|$$

tend t^2.

● Vrai ❍ Faux

L'hypothèse $a_1 \neq 0$ nous assure qu'aucun des a_{2p+1} n'est nul. Le passage à la limite est alors évident.

5.c. Si $a_1 \neq 0$, alors la série

$$\sum a_{2p+1} t^{2p+1}$$

converge absolument si, et seulement si, $|t| < 1$.

❑ Oui, c'est la règle de D'Alembert !

❑ Mais non, c'est clairement faux !

✔ Ptêt ben, j'en jurerais pas...

La règle de D'Alembert nous permet de déduire de la question précédente que :
– si $t^2 < 1$, alors la série converge absolument ;
– si la série converge absolument, alors $t^2 \leqslant 1$.
Il est donc prudent de ne pas conclure trop vite !
❧ *En fait, en remarquant un télescopage, on peut vérifier que*

$$|a_{2p+1}| = \frac{3}{4p^2 - 1} |a_3|$$

ce qui prouve que la série $\sum a_{2p+1} t^{2p+1}$ converge normalement sur $[-1, 1]$.
L'affirmation est donc fausse, mais pas clairement fausse...

5.d. Le rayon de convergence de la série entière

$$\sum a_{2p+1} t^{2p+1}$$

est

❑ inférieur à 1

❑ égal à 1

✔ supérieur à 1

C'est vrai si $a_1 \neq 0$ d'après ce qui précède. Mais pour $a_1 = 0$, le rayon de convergence est infini.

5.e. Pour tout $t > 0$,

$$\forall\, p \in \mathbb{N}, \qquad \frac{a_{2p+2} t^{2p+2}}{a_{2p} t^{2p}} = \frac{-(2p-2)t^2}{2p+2}.$$

❍ Vrai ● Faux

On prend $n = 2p+1$, on multiplie par $t^{2p+2} = t^2 \cdot t^{2p}$. Pour $p = 1$, on voit que $a_4 = 0$ et pour $p = 2$, on divise donc par zéro.

C'EST MAL !

5.f. Pour tout $a_0 \in \mathbb{R}$, le rayon de convergence de la série entière

$$\sum a_{2p} t^{2p}$$

est

✔ strictement positif

❏ égal à 1

✔ supérieur à 1

✔ infini

Pour tout $p \geqslant 2$, le coefficient a_{2p} est nul, donc la série entière converge pour tout $t \in \mathbb{R}$ et sa somme est une fonction polynomiale : le rayon de convergence est infini.

6.

On considère une fonction f développable en série entière au voisinage de l'origine

$$\forall\, t \in \left]-\alpha, \alpha\right[, \quad f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$$

où les coefficients a_n vérifient la relation de récurrence

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad (n^2 - 1)(a_n - a_{n-1}) = 0. \tag{R}$$

6.a. L'ensemble C des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient la relation (R) est un espace vectoriel.

● Vrai ❍ Faux

Il s'agit en effet d'une relation de récurrence linéaire homogène.

6.b. L'application $\varphi : C \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall\, a \in C, \qquad \varphi(a) = a_0$$

✔ est linéaire

❏ n'est pas linéaire

❏ est injective

✔ n'est pas injective

L'application φ est évidemment linéaire.
La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0 = 0$ et

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad a_n = 1$$

appartient au noyau de φ et n'est pas la suite nulle. Donc l'application φ n'est pas injective.

6.c. La dimension de l'espace C est égale

❏ à 0

❏ à 1

✔ à 2

D'après (R), la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à C si, et seulement si,

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad a_n = a_1.$$

L'application linéaire

$$\psi \,:\, C \to \mathbb{R}^2$$

définie par

$$\forall\, a \in C, \qquad \psi(a) = (a_0, a_1)$$

est donc un isomorphisme et par conséquent

$$\dim C = 2.$$

On suppose que la fonction x définie par

$$\forall\, t \in \left]-R, R\right[, \quad x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$$

est une solution développable en série entière de l'équation différentielle

$$t^2(1-t)x''(t) + t(1-3t)x'(t) - x(t) = 0. \qquad \text{(E)}$$

On peut en déduire que

$$-a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (n^2 - 1)(a_n - a_{n-1})t^n = 0$$

pour tout $t \in \left]-R, R\right[$.

6.d. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation (R).

● Vrai ❍ Faux

Le second membre, identiquement nul, peut être vu comme la somme d'une série entière :

$$\forall\, t \in \left]-R, R\right[, \qquad 0 = 0 + \sum_{n=1}^{+\infty} 0 \cdot t^n.$$

Comme la fonction x est supposée développable en série entière, *le réel R est en particulier supposé strictement positif.*
Par unicité du développement en série entière, on en déduit que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des coefficients vérifie la relation (R).

6.e. La coefficient a_0 est

❏ égal à 1

✔ égal à 0

❏ quelconque

Même justification qu'à la question précédente !

$\boxed{\textbf{6.f.}}$ Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n t^n$ est alors

❏ nul

❏ infini

✔ supérieur à 1

❏ égal à 1

Les solutions développables en série entière sont les fonctions de la forme

$$a_1 \sum_{n=1}^{+\infty} t^n.$$

Le rayon de convergence est égal à 1 *pour* $a_1 \neq 0$ *et infini pour* $a_1 = 0$.

$\boxed{\textbf{6.g.}}$ Toute solution de l'équation différentielle (E) sur $]0,1[$ est de la forme

$$x(t) = a_1 \sum_{n=1}^{+\infty} t^n.$$

❏ Oui, bien sûr !

✔ Il est clair que non !

❏ Je ne sais pas, il faudrait poser les calculs.

Sur l'intervalle $I =]0,1[$, *l'équation* (E) *est une équation différentielle linéaire homogène du second ordre et le coefficient de* $x''(t)$ *ne s'annule pas.*
Le Théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique donc et l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension deux.
En particulier, les solutions ne peuvent pas être toutes proportionnelles.

6.h. Toute solution de l'équation différentielle (E) sur $]-1,1[$ est de la forme

$$x(t) = a_1 \sum_{n=1}^{+\infty} t^n.$$

❏ Oui, bien sûr !

❏ Il est clair que non !

✔ Je ne sais pas, il faudrait poser les calculs.

On a trouvé une solution

$$\forall\, t \in]-1,1[, \quad x_1(t) = \frac{t}{1-t}.$$

En faisant varier la constante, on peut en déduire les solutions sur $I_1 =]-1,0[$ et $I_2 =]0,1[$.
Après calculs, on sait que x est une solution sur I_1 si, et seulement si, il existe deux réels a_1 et b_1 tels que

$$\forall\, t \in I_1, \quad x(t) = a_1 \cdot \frac{t}{1-t} + b_1 \cdot \frac{1}{t(1-t)}$$

et que x est solution sur I_2 si, et seulement si, il existe deux réels a_2 et b_2 tels que

$$\forall\, t \in I_2, \quad x(t) = a_2 \cdot \frac{t}{1-t} + b_2 \cdot \frac{1}{t(1-t)}.$$

Par conséquent, x est une solution sur $]-1,1[$ si, et seulement si,

$$a_1 = a_2 \qquad \textit{et} \qquad b_1 = b_2 = 0.$$

Autrement dit : l'ensemble des solutions sur $]-1,1[$ est la droite vectorielle dirigée par la solution développable en série entière

$$\left[t \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} t^n = \frac{t}{1-t} \right].$$

L'affirmation de l'énoncé est donc vraie, mais elle n'a rien d'évident !

REMARQUE.— *La singularité (= le fait que le facteur de $x''(t)$ s'annule en $t = 0$) se manifeste ici par le fait que l'ensemble des solutions d'une équation du* second *ordre est un espace vectoriel de dimension* un.