Convergence simple - avril 2020

1.

La série

$$\sum x^n$$

converge si, et seulement si, $|x| < 1$.

❍ Vrai ❍ Faux

2.

La série

$$\sum \frac{x^n}{n}$$

converge si, et seulement si, $|x| < 1$.

❍ Vrai ❍ Faux

3.

La série

$$\sum \frac{1}{n^x}$$

converge si, et seulement si, $x \geqslant 1$.

❍ Vrai ❍ Faux

4.

La série

$$\sum \frac{\sin n}{n\sqrt{n}}\, x^n$$

converge absolument si, et seulement si, $|x| < 1$.

❍ Vrai ❍ Faux

5.

La série

$$\sum \frac{\cos n\pi}{n}\, x^n$$

converge si, et seulement si,

❏ $-1 < x < 1$

❏ $-1 < x \leqslant 1$

❏ $-1 \leqslant x < 1$

❏ C'est plus compliqué que ça !

6.

La série de fonctions

$$\sum \frac{1}{(1+x^2)^n}$$

converge simplement

❏ sur $\mathbb{R}$

❏ sur $\mathbb{R}^*$

❏ sur $[1, +\infty[$

❏ sur $]1, +\infty[$

7.

On considère la série de fonctions $\sum u_n$ avec

$$u_n(x) = \frac{n^2 x^n}{3n+2}.$$

7.a. La série $\sum u_n(x)$ diverge grossièrement pour $|x| \geqslant 1$.

❍ Vrai ❍ Faux

7.b. La série $\sum u_n(x)$ converge absolument pour

❏ $x \in \mathbb{R}$

❏ $|x| < 1$

❏ $|x| \leqslant 1$

❏ $|x| < 2$

8.

La somme

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\sqrt{n}x}$$

est définie

❏ sur $\mathbb{R}$ tout entier

❏ sur $\mathbb{R}_+$

❏ sur $\mathbb{R}_+^*$

❏ sur $[1, +\infty[$ seulement

9.

On considère la série de fonctions $\sum u_n$ où

$$\forall\, x \geqslant 0, \quad u_n(x) = \frac{x}{n(1+x^n)}.$$

$\boxed{\textbf{9.a.}}$ Lorsque n tend vers $+\infty$, on a

$$u_n(x) \sim \frac{x}{n}$$

pour

❏ $x \in [0, 1]$

❏ $x \in [0, 1[$

❏ $x \in]0, 1[$

❏ $x \in \mathbb{R}_+$

$\boxed{\textbf{9.b.}}$ La série $\sum u_n(x)$ converge

❏ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$

❏ pour tout $x \geqslant 1$

❏ pour tout $x > 1$

❏ si, et seulement si, $x > 1$

10.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n(x) = \frac{(-1)^n}{1+x^n}.$$

La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur

❏ l'intervalle fermé $\mathbb{R}_+$

❏ l'intervalle ouvert $\mathbb{R}_+^*$

❏ l'intervalle fermé $[1, +\infty[$

❏ l'intervalle ouvert $]1, +\infty[$

❏ Aucun de ces intervalles !

11.

On considère la série de fonctions $\sum u_n$ avec

$$u_n(x) = \frac{1}{n+x} - \frac{1}{n-x}.$$

11.a. Pour tout $x \in]0,1[$,

$$u_n(x) = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

- ❏ Vrai, mais on ne peut pas en déduire que la série converge.
- ❏ Vrai et on peut en déduire que la série converge.
- ❏ Vrai et on peut en déduire que la série diverge.
- ❏ Faux.

11.b. Pour tout $x \in]0,1[$,

❏
$$u_n(x) \sim \frac{1}{n^2}$$

❏
$$u_n(x) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

❏
$$u_n(x) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

11.c. L'ordre de grandeur trouvé à la question précédente prouve que la série de fonctions converge simplement sur $]0,1[$.

❍ Vrai ❍ Faux

11.d. Cet ordre de grandeur prouve aussi que la série de fonctions converge normalement sur $]0,1[$.

❍ Vrai ❍ Faux

12.

On considère la série de fonctions $\sum u_n$ avec

$$u_n(x) = \frac{\ell n(1+n^2x^2)}{1+n^3}.$$

12.a. Lorsque x tend vers 0,

$$u_n(x) \sim \frac{x^2}{n}.$$

❍ Vrai ❍ Faux

$\boxed{\textbf{12.b.}}$ Pour $x > 0$, lorsque n tend vers $+\infty$, on a

❏
$$u_n(x) \sim \frac{\ln n}{n^3}$$

❏
$$u_n(x) \sim \frac{2 \ln n}{n^3}$$

❏
$$u_n(x) = \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$$

❏
$$u_n(x) = \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^3}\Big)$$

❏
$$u_n(x) = o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$$

$\boxed{\textbf{12.c.}}$ L'ordre de grandeur précédent prouve que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

❍ Vrai ❍ Faux

$\boxed{\textbf{12.d.}}$ La série de fonctions $\sum u_n$

❏ converge normalement sur tout segment

❏ converge normalement sur $\mathbb{R}$

❏ converge normalement sur l'intervalle ouvert
$$]-A, A[$$
pour tout $A > 0$

❏ là, tout de suite, j'en sais rien et je ne veux pas répondre au hasard