MPSI 2 – Semaine 24

A. On considère la matrice

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$$

et la matrice écrite par blocs

$$A_2 = \begin{pmatrix} A_1 & 0_2 \\ 0_2 & 2A_1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_4(\mathbb{R}).$$

A - 1. Calculer A_1^2 et vérifier que la famille

$$(I_2, A_1, A_1^2)$$

est liée. En déduire un polynôme annulateur de A_1 qui soit unitaire et de degré 2.

On vérifie que

$$A_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 9 & -2 \end{pmatrix}$$

et donc que

$$A_1^2 - 3A_1 + 5I_2 = 0_2.$$

On déduit de cette relation de liaison *que le polynôme*

$$P_0 = X^2 - 3X + 5$$

est un polynôme annulateur de A_1.

A - 2. Démontrer que la famille

$$(I_2, A_1)$$

est libre, puis que

$$P_0 = X^2 - 3X + 5$$

est l'unique polynôme annulateur de A_1 qui soit unitaire et de degré 2.

Les matrices I_2 et A_1 ne sont pas proportionnelles, donc le couple

$$(I_2, A_1)$$

est une famille libre.

❧ *Soit*

$$P_1 = X^2 + aX + b,$$

un autre polynôme annulateur de A_1 qui soit unitaire et de degré 2.

On en déduit que

$$A_1^2 = 3A_1 - 5I_2 = -aA_1 - bI_2$$

et donc que

$$(3+a)A_1 - (5-b)I_2 = 0_2.$$

Comme le couple (I_2, A_1) est une famille libre, on en déduit que $a = -3$ et $b = 5$, et donc que $P_1 = P_0$.

A - 3. Démontrer que la matrice A_1 est inversible et calculer son inverse.

On déduit du polynôme annulateur trouvé que

$$A_1(A_1 - 3I_2) = -5I_2,$$

donc que A_1 est inversible et que

$$A_1^{-1} = \frac{3}{5}I_2 - \frac{1}{5}A_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

REMARQUE.— *Quelle que soit la manière de calculer A_1^{-1}, il faut vérifier l'exactitude du résultat avant de l'encadrer...*

A - 4. Trouver un polynôme annulateur de $2A_1$, qui soit aussi unitaire et de degré 2.

Comme P_0 est un polynôme annulateur de A_1, on a

$$P_0\Big(\frac{1}{2}\cdot(2A_1)\Big) = P_0(A_1) = 0_2$$

donc le polynôme

$$Q_0 = P_0\Big(\frac{1}{2}X\Big) = \frac{X^2}{4} - \frac{3}{2}X + 5$$

est un polynôme annulateur de $2A_1$.
Par conséquent, le polynôme

$$Q_1 = 4Q_0 = X^2 - 6X + 20$$

est un polynôme annulateur de $2A_1$ qui est unitaire et de degré 2.

A - 5. Démontrer que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad A_2^k = \begin{pmatrix} A_1^k & 0_2 \\ 0_2 & 2^k A_1^k \end{pmatrix}.$$

En déduire un polynôme annulateur de A_2.

L'expression de A_2^k s'obtient par récurrence, en appliquant la formule du cours pour calculer un produit de matrices diagonales par blocs.
❧ *Par combinaison linéaire, on en déduit que*

$$P(A_2) = \begin{pmatrix} P(A_1) & 0_2 \\ 0_2 & P(2A_1) \end{pmatrix}$$

pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$.
Par conséquent, P est un polynôme annulateur de A_2 si, et seulement si, P est à la fois un polynôme annulateur de A_1 et un polynôme annulateur de $2A_1$.
Comme

$$\begin{aligned}
(P_0Q_1)(A_2) &= \begin{pmatrix} (P_0Q_1)(A_1) & 0 \\ 0 & (P_0Q_1)(2A_1) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} P_0(A_1).Q_1(A_1) & 0 \\ 0 & P_0(2A_1).Q_1(2A_1) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \times Q_1(A_1) & 0 \\ 0 & P_0(2A_1) \times 0 \end{pmatrix} \\
&= 0_4,
\end{aligned}$$

le polynôme

$$P = P_0Q_1 = X^4 - 9X^3 + 43X^2 - 90X + 100$$

convient.

A - 6. Démontrer que A_2 est inversible et calculer son inverse.

On a trouvé un polynôme annulateur de A_2 dont le coefficient constant n'est pas nul. Cela prouve que A_2 est inversible, mais... le calcul de A_2^{-1} qui s'en déduit paraît... un peu... compliqué ?
N'oublions pas que A_2 est une matrice diagonale par blocs : elle est inversible car les blocs diagonaux sont inversibles et

$$\begin{aligned}
A_2^{-1} &= \begin{pmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & (2A_1)^{-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2.A_1^{-1} & 0 \\ 0 & A_1^{-1} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ -6 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

REMARQUE.— *On dispose de plusieurs méthodes pour calculer l'inverse d'une matrice. Il est important de les maîtriser toutes pour pouvoir choisir en toutes circonstances la méthode plus efficace.*

⋆

B.

B - 1. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}).$$

Démontrer que A est inversible et calculer son inverse.

Pour une matrice de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$, toutes *les méthodes sont bonnes et aucune n'est inefficace. Ma méthode préférée utilise les Formules de Cramer : on met en facteur l'inverse du déterminant et on recopie d'une part les coefficients qui* changent de signe *et d'autre part les coefficients qui changent de place.*

$$A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

B - 2. On considère la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$$

et la matrice écrite par blocs

$$M = \begin{pmatrix} B & B \\ 2B & B \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_4(\mathbb{R}).$$

B - 2.a. Démontrer que B est inversible et calculer son inverse.

Re-belote ! On met en facteur l'inverse du déterminant et on recopie d'une part les coefficients qui changent de signe *et d'autre part les coefficients qui changent de place.*

$$B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

B - 2.b. Calculer le produit de la matrice M par la matrice

$$\begin{pmatrix} -B' & B' \\ 2B' & -B' \end{pmatrix}$$

où $B' \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.

En déduire que la matrice M est inversible et donner son inverse.

On applique les règles du produit matriciel par blocs.

$$\begin{pmatrix} B & B \\ 2B & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -B' & B' \\ 2B' & -B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BB' & 0 \\ 0 & BB' \end{pmatrix}$$

En choisissant $B' = B^{-1}$ (ce qui est possible d'après la question précédente), on en déduit que M est inversible et que

$$M^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & -4 & 2 \\ 6 & -2 & -3 & 1 \\ -8 & 4 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

B - 3. On considère maintenant la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$$

et la matrice écrite par blocs

$$M = \begin{pmatrix} C & C \\ 2C & C \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_4(\mathbb{R}).$$

B - 3.a. Démontrer que le rang de la matrice M est au moins égal à 2.

Par définition,

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 6 & -6 & 3 & -3 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

L'image de la matrice M est le sous-espace engendré par les colonnes de M. Comme la première et la troisième colonnes de M ne sont pas proportionnelles, le rang de M est au moins égal à 2.

B - 3.b. Étant donnés deux matrices colonnes

$$X_1, X_2 \in \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$$

on construit une matrice colonne

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{4,1}(\mathbb{R}).$$

Démontrer que $MX = 0$ si, et seulement si,

$$CX_1 = CX_2 = 0.$$

D'après les règles du calcul matriciel par blocs,

$$MX = \begin{pmatrix} CX_1 + CX_2 \\ 2CX_1 + CX_2 \end{pmatrix}$$

donc $MX = 0$ *si, et seulement si,*

$$\begin{cases} CX_1 + CX_2 = 0 \\ 2CX_1 + CX_2 = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire (opérations de pivot !)

$$CX_1 = CX_2 = 0.$$

B - 3.c. En déduire que

$$\dim \operatorname{Ker} M \geqslant 2$$

et conclure.

Il est clair que le noyau de la matrice C est la droite vectorielle dirigée par le vecteur

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

D'après la question précédente, les colonnes

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

appartiennent au noyau de M et ne sont pas proportionnelles, donc la dimension du noyau de M est au moins égale à 2.

❧ *D'après le Théorème du rang, le nombre de colonnes (= la dimension de l'espace de* départ*) est égale à la somme de la dimension du noyau et du rang.*

Donc

$$\operatorname{rg} M = \dim \operatorname{Ker} M = 2.$$

⋆

C.

C - 1. On considère ici la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$$

ainsi que la matrice écrite par blocs

$$M = \begin{pmatrix} A \\ I_3 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{6,3}(\mathbb{R}).$$

C - 1.a. En effectuant des opérations de pivot sur les colonnes, démontrer que la matrice M est équivalente à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & * & * \\ 1 & * & * \\ 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$$

puis qu'elle est équivalente à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & * & 0 \\ 1 & * & 0 \\ 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}.$$

On effectue dans un premier temps les opérations

$$C_2 \leftarrow C_2 + C_1 \quad \text{et} \quad C_3 \leftarrow C_3 - 3C_1$$

pour faire apparaître les 0 sur la première ligne. On obtient alors la matrice suivante.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -4 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On effectue ensuite l'opération

$$C_3 \leftarrow C_3 + C_2$$

et on obtient la matrice suivante.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

C - 1.b. Démontrer *sans aucun calcul supplémentaire* qu'il existe une matrice inversible $Q \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que

$$AQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer le produit MQ et identifier cette matrice Q.

D'après le Cours, effectuer des opérations de pivot sur les colonnes de A (resp. de M) revient à multiplier la matrice A (resp. la matrice M) à droite par une matrice inversible Q.

D'après les règles du produit par blocs,

$$MQ = \begin{pmatrix} AQ \\ I_3Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AQ \\ Q \end{pmatrix}$$

donc

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

C - 1.c. On note V_1, V_2 et V_3, les colonnes de la matrice Q. Vérifier que $AV_3 = 0$ et que le couple

$$(AV_1, AV_2)$$

est une base de l'image de A. De quel théorème célèbre peut-on rapprocher ces propriétés ?

D'après les règles du calcul par blocs (encore !),

$$AQ = \begin{pmatrix} AV_1 & AV_2 & AV_3 \end{pmatrix}.$$

Les trois colonnes appartiennent à l'image de A ; les deux premières ne sont pas proportionnelles et donc linéairement indépendantes ; la troisième est nulle, donc les colonnes AV_1 et AV_2 forment une famille libre et génératrice de $\operatorname{Im} A$ et $AV_3 = 0$.

On retrouve ainsi le théorème du rang : le nombre de colonnes de A (= le nombre de colonnes de Q) est égal à la somme du rang de A et de la dimension du noyau de A.

C - 2. On étudie maintenant la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'après le Cours, la connaissance d'un polynôme annulateur de B permet de prouver que B est inversible et de calculer l'inverse de B.

Dans un premier temps, on prouve que B est inversible avec l'algorithme du pivot. On verra ensuite qu'un polynôme annulateur de B n'est pas simple à calculer et que le calcul de B^{-1} par ce biais serait sans doute plus compliqué que par l'algorithme du pivot.

C - 2.a. Par des opérations de pivot sur les colonnes, démontrer que la matrice

$$M = \begin{pmatrix} B \\ I_3 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{6,3}(\mathbb{R})$$

est équivalente à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & * & * \\ 1 & * & * \\ 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$$

puis à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

et enfin à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}.$$

On effectue d'abord les opérations

$$C_2 \leftarrow C_2 + C_1 \quad \textit{et} \quad C_3 \leftarrow C_3 - 2C_1$$

pour obtenir

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On effectue ensuite les opérations

$$C_1 \leftarrow C_1 + 2C_3 \quad \textit{et} \quad C_2 \leftarrow C_2 + 4C_3$$

pour obtenir

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -3 & -7 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Enfin, avec les opérations

$$C_1 \leftarrow C_1 - C_2 \quad \textit{et} \quad C_3 \leftarrow C_3 - C_2$$

on arrive à

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & -7 & -5 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

C - 2.b. En interprétant ces opérations de pivot par un produit matriciel, démontrer que la matrice B est inversible et donner son inverse.

En effectuant des opérations de pivot supplémentaires sur les colonnes (permutation des colonnes C_2 et C_3, puis changement de signe de ces deux colonnes), on établit enfin que la matrice M est équivalente à la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -5 & 7 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

En effectuant des opérations de pivot sur les colonnes de M, on a multiplié M à droite par une certaine matrice inversible $Q \in GL_3(\mathbb{R})$. D'après les règles du calcul matriciel par blocs, on a obtenu

$$MQ = \begin{pmatrix} BQ \\ I_3 Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_3 \\ Q \end{pmatrix}$$

ce qui prouve que B est inversible, d'inverse

$$Q = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

C - 2.c. Vérifier que

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 9 & 8 & 13 \\ 6 & 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

En déduire que la famille

$$(E_1, BE_1, B^2E_1)$$

est libre, où E_1 est le premier vecteur de la base canonique.

Quelle que soit la matrice M, le vecteur ME_1 est la première colonne de M. Vérifier que la famille

$$(E_1, BE_1, B^2E_1)$$

est libre revient à s'assurer que le rang de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

est égal à 3. Comme les opérations de pivot conservent le rang, il s'agit en fait de vérifier que le rang de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

est égal à 3, ce qui est évident :
- *les deux dernières colonnes ne sont pas proportionnelles, donc le rang est au moins égal à 2 ;*
- *la première colonne n'est pas engendrée par les deux dernières, donc le rang est au moins égal à 3 ;*
- *il y a trois colonnes, donc le rang est au plus égal à 3.*

C - 2.d. En déduire qu'il n'existe pas de polynôme annulateur de B dont le degré soit égal à 2.

Si $P = aX^2 + bX + c$ est un polynôme annulateur de B avec $a \neq 0$ (degré égal à 2), alors

$$a \cdot B^2 + b \cdot B + c \cdot I_3 = 0_3$$

et en particulier

$$a \cdot B^2E_1 + b \cdot BE_1 + c \cdot E_1 = 0.$$

Or (E_1, BE_1, B^2E_1) est une famille libre, donc il faudrait

$$(a, b, c) = (0, 0, 0)$$

ce qui est contradictoire.
Donc il n'existe pas de polynôme annulateur de B dont le degré soit égal à 2.

REMARQUE.— *Le Cours de Spé (Théorème de Cayley-Hamilton) permet de calculer un polynôme annulateur de B :*

$$X^3 - 4X - X + 1$$

ce qui prouve que B est inversible et que son inverse est donné par

$$B^{-1} = -B^2 + 4B + I_3.$$

⋆

D. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

D - 1. Calculer trois réels a, b et c tels que

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$$

puis exprimer A^2 en fonction de A.
D'après la formule du produit matriciel,

$$C \times \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot C & b \cdot C & c \cdot C \end{pmatrix}$$

donc $a = 1$, $b = 2$ *et* $c = -1$.
On en déduit que

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = 4A.$$

D - 2. On suppose que $AX = X$. En multipliant par A, en déduire que $AX = 0$, puis que $X = 0$. Que peut-on en conclure sur la matrice

$$B = A - I_3 \quad ?$$

Si $AX = X$, *alors* $A^2X = AX$. *Or* $A^2 = 4A$, *donc* $4AX = AX$, *donc* $AX = 0$. *Or* $X = AX$, *donc* $X = 0$.
On vient de démontrer que : si $BX = 0$, *alors* $X = 0$. *Comme* B *est une matrice carrée, cela prouve que* B *est inversible.*

D - 3. Exprimer B^2 en fonction de A et de I_3. En déduire une expression de B^2 en fonction de B et de I_3, puis une expression de B^{-1} en fonction de B et I_3.
Comme A *et* I_3 *commutent, on peut appliquer la formule du binôme :*

$$B^2 = (A - I_3)^2 = A^2 - 2A + I_3 = 2A + I_3.$$

On en déduit que

$$B^2 - 2B = (2A + I_3) - 2(A - I_3) = 3I_3,$$

c'est-à-dire

$$B^2 = 2B + 3I_3.$$

On en déduit que

$$\frac{1}{3}B(B - 2I_3) = I_3$$

et donc que B *est inversible (ce qu'on savait déjà) et que*

$$B^{-1} = \frac{1}{3}(B - 2I_3).$$

⋆

E. On considère les matrices

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

E - 1. Démontrer (sans calcul !) que L et U sont inversibles et calculer leurs inverses.
Une matrice triangulaire est inversible si, et seulement si, ses coefficients diagonaux sont tous différents de 0, *donc* L *et* U *sont inversibles.*
D'après les cours, U^{-1} *et* L^{-1} *sont respectivement de la forme*

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 \\ * & * & 1 \end{pmatrix}$$

donc le calcul explicite de ces deux matrices est très rapide. On trouve

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

E - 2. Calculer les matrices $A = LU$ et $B = UL$. Démontrer (sans calcul !) qu'elles sont inversibles et calculer leurs inverses.

Un produit PQ de deux matrices inversibles est encore une matrice inversible et de plus

$$(PQ)^{-1} = Q^{-1}P^{-1}.$$

Donc les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \textit{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

sont inversibles et de plus

$$A^{-1} = U^{-1}L^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & 4 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B^{-1} = L^{-1}U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 3 & -8 & -10 \end{pmatrix}.$$