Convergence simple - avril 2020

Les questions indexées par des numéros différents sont indépendantes.
Toutes les variables sont RÉELLES.

1.

La série
$$\sum x^n$$
converge si, et seulement si, $|x| < 1$.

● Vrai ❍ Faux

Série géométrique (série de référence).

2.

La série
$$\sum \frac{x^n}{n}$$
converge si, et seulement si, $|x| < 1$.

❍ Vrai ● Faux

La série
- *converge absolument pour $|x| < 1$ (par comparaison avec $\sum x^n$) ;*
- *est semi-convergente pour $x = -1$ (CSSA) ;*
- *diverge pour $x = 1$ (série harmonique, série de référence) ;*
- *diverge grossièrement pour $|x| > 1$.*

La série est donc convergente si, et seulement si,
$$x \in [-1, 1[.$$
Elle est absolument *convergente si, et seulement si,*
$$|x| < 1.$$

3.

La série
$$\sum \frac{1}{n^x}$$
converge si, et seulement si, $x \geqslant 1$.

❍ Vrai ● Faux

C'est une série de Riemann (série de référence), elle converge si, et seulement si, $x > 1$.

4.

La série
$$\sum \frac{\sin n}{n\sqrt{n}}\, x^n$$
converge absolument si, et seulement si, $|x| < 1$.

❍ Vrai ● Faux

Comme
$$\frac{\sin n}{n\sqrt{n}} = \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^{3/2}}\Big),$$
la série converge absolument pour $|x| \leqslant 1$.
Par ailleurs, la suite de terme général $\sin n$ *ne tend pas vers* 0 *et, pour* $|x| > 1$*, la suite de terme général*
$$\frac{x^n}{n\sqrt{n}}$$
tend vers l'infini, donc la série $\sum u_n(x)$ *diverge grossièrement pour* $|x| > 1$.
Ainsi, la série de fonctions $\sum u_n$ *converge absolument si, et seulement si,* $|x| \leqslant 1$.

5.

La série
$$\sum \frac{\cos n\pi}{n}\, x^n$$
converge si, et seulement si,

❏ $-1 < x < 1$

✔ $-1 < x \leqslant 1$

❏ $-1 \leqslant x < 1$

❏ C'est plus compliqué que ça !

Pour $|x| < 1$*, le terme général est* $o(x^n)$ *et la série converge (absolument).*
Pour $|x| > 1$*, la série diverge grossièrement.*
Pour $x = 1$*, la série converge grâce au CSSA :*
$$\frac{\cos n\pi}{n}\, x^n = \frac{(-1)^n}{n}.$$
Pour $x = -1$*, la série diverge, car c'est la série harmonique :*
$$\frac{\cos n\pi}{n}\,(-1)^n = \frac{1}{n}.$$

6.

La série de fonctions

$$\sum \frac{1}{(1+x^2)^n}$$

converge simplement

- ❏ sur $\mathbb{R}$
- ✔ sur $\mathbb{R}^*$
- ✔ sur $[1, +\infty[$
- ✔ sur $]1, +\infty[$

Il s'agit de la série géométrique de raison

$$q = \frac{1}{1+x^2}.$$

Il est clair que $0 < q \leqslant 1$ *et que* $q = 1$ *si, et seulement si,* $x = 0$.
La série converge donc si, et seulement si, $x \neq 0$.

7.

On considère la série de fonctions $\sum u_n$ avec

$$u_n(x) = \frac{n^2 x^n}{3n+2}.$$

7.a. La série $\sum u_n(x)$ diverge grossièrement pour $|x| \geqslant 1$.

● Vrai ❍ Faux

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$u_n(x) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{nx^n}{3}$$

et on conclut par croissances comparées de n *et de* x^n.

7.b. La série $\sum u_n(x)$ converge absolument pour

- ❏ $x \in \mathbb{R}$
- ✔ $|x| < 1$
- ❏ $|x| \leqslant 1$
- ❏ $|x| < 2$

L'équivalent précédent montre aussi que la suite de terme général tend vers 0 *pour* $|x| < 1$.
Par conséquent, le rayon de convergence de la série entière est égal à 1, *ce qui prouve que la série* $\sum u_n(x)$ *converge absolument pour tout* $|x| < 1$.

REMARQUE.—
Pour comparer $u_n(x)$ *au terme général d'une série de référence absolument convergente, on a le choix entre :*

– *une comparaison à une série de Riemann :*

$$u_n(x) \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

en rappelant que

$$\lim_{n\to+\infty} n^3 x^n = 0$$

par croissances comparées des puissances de n *et des suites géométriques ;*

– *une comparaison à une série géométrique :*

$$\forall\, |x| < q < 1, \quad u_n(x) = \mathcal{o}(q^n)$$

en rappelant que

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{x}{q}\right)^n = 0$$

pour les mêmes raisons (avec $0 \leqslant {}^{|x|}/_{q} < 1$*).*

Ces deux options sont également critiquables du point de vue du style.

– *La première est peu appropriée : les ordres de grandeur du terme général* $u_n(x)$ *et de la série de référence sont très différents ;*
– *La seconde est alambiquée : il faut fouiller les détails du cours pour penser à* $|x| < q < 1$ **[Ch.12 - 3]**.

La meilleure solution me paraît donc d'utiliser toute la puissance du cours sur les séries entières, puissance disponible dès qu'on connaît le rayon de convergence.

8.

La somme
$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\sqrt{n}x}$$
est définie

❏ sur $\mathbb{R}$ tout entier

❏ sur $\mathbb{R}_+$

✔ sur $\mathbb{R}_+^*$

❏ sur $[1, +\infty[$ seulement

Pour $x \leqslant 0$, la série est grossièrement divergente.
Pour $x > 0$, par croissances comparées de $n^{1/2}$ et de $\ell n\, n$,
$$n^\alpha e^{-\sqrt{n}x} = \exp\big[\underbrace{-x\sqrt{n} + \alpha\,\ell n\, n}_{\to -\infty}\big]$$
donc $e^{-\sqrt{n}x} = o(1/n^\alpha)$ quel que soit $\alpha > 1$, ce qui prouve la convergence absolue par comparaison à une série de Riemann.

REMARQUE.—
Le terme général est à la fois négligeable devant n'importe quelle puissance de n et infiniment grand devant n'importe quelle suite géométrique de limite nulle. Nous n'avons donc pas d'autre possibilité que de comparer la série $\sum u_n(x)$ à une série de Riemann. (En particulier, la règle de D'Alembert ne permet pas de conclure.)

9.

On considère la série de fonctions $\sum u_n$ où
$$\forall\, x \geqslant 0, \quad u_n(x) = \frac{x}{n(1+x^n)}.$$

9.a. Lorsque n tend vers $+\infty$, on a
$$u_n(x) \sim \frac{x}{n}$$
pour

❏ $x \in [0, 1]$

✔ $x \in [0, 1[$

✔ $x \in]0, 1[$

❏ $x \in \mathbb{R}_+$

Le facteur $(1 + x^n)$ tend vers 1 pour $0 \leqslant x < 1$; il tend vers 2 (et non pas vers 1) pour $x = 1$ et vers $+\infty$ pour $x > 1$.

REMARQUE.— *Pour $x = 0$, du fait que $u_n(x) = 0$ pour tout $n \geqslant 1$, la comparaison*
$$u_n(x) \sim 0$$
est, pour cette fois !, *légitime.*

$\boxed{\textbf{9.b.}}$ La série $\sum u_n(x)$ converge

- ❏ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$
- ❏ pour tout $x \geqslant 1$
- ✔ pour tout $x > 1$
- ❏ si, et seulement si, $x > 1$

Pour $0 < x < 1$, d'après l'équivalent précédent, la série $\sum u_n(x)$ diverge (Théorème de comparaison pour les séries divergentes de terme général positif **[Ch.4 - 47.7]**). *Pour $x = 1$, on a*

$$u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n}$$

et la série $\sum u_n(x)$ diverge encore.
Enfin, pour $x > 1$, on a

$$u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{x}\right)^{n-1} = o\left[\left(\frac{1}{x}\right)^n\right]$$

donc la série $\sum u_n(x)$ converge par comparaison à la série géométrique de raison $0 < 1/x < 1$.
❧ *L'équivalence (dernière proposition) est fausse car la série $\sum u_n(x)$ converge pour $x = 0$.*

10.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n(x) = \frac{(-1)^n}{1+x^n}.$$

La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur

- ❏ l'intervalle fermé $\mathbb{R}_+$
- ❏ l'intervalle ouvert $\mathbb{R}_+^*$
- ❏ l'intervalle fermé $[1, +\infty[$
- ✔ l'intervalle ouvert $]1, +\infty[$
- ❏ Aucun de ces intervalles !

Pour $0 \leqslant x \leqslant 1$, le terme général ne tend pas vers 0 !
Pour $x > 1$,

$$u_n(x) \sim \left(\frac{-1}{x}\right)^n$$

et comme $|-1/x| < 1$, on déduit du Théorème de comparaison **[Ch.4 - 43.1]** *que la série $\sum u_n(x)$ converge absolument et donc qu'elle converge* **[Ch.4 - 39.1]**.

11.

On considère la série de fonctions $\sum u_n$ avec

$$u_n(x) = \frac{1}{n+x} - \frac{1}{n-x}.$$

$\boxed{\textbf{11.a.}}$ Pour tout $x \in]0, 1[$,

$$u_n(x) = o\Big(\frac{1}{n}\Big)$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

- ✔ Vrai, mais on ne peut pas en déduire que la série converge.
- ❏ Vrai et on peut en déduire que la série converge.
- ❏ Vrai et on peut en déduire que la série diverge.
- ❏ Faux.

Il est clair que chaque terme est équivalent à $1/n$. Par conséquent, lorsque n tend vers $+\infty$,

$$\begin{aligned} u_n(x) &= \Big(\frac{1}{n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big) - \Big(\frac{1}{n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big) \\ &= o\Big(\frac{1}{n}\Big). \end{aligned}$$

Comme la série harmonique $\sum 1/n$ diverge, cet ordre de grandeur est une forme indéterminée.

$\boxed{\textbf{11.b.}}$ Pour tout $x \in]0, 1[$,

❏
$$u_n(x) \sim \frac{1}{n^2}$$

✔
$$u_n(x) = \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$$

❏
$$u_n(x) = o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$$

En réduisant au même dénominateur,

$$\begin{aligned} u_n(x) = \frac{-2x}{(n+x)(n-x)} &\sim \frac{-2x}{n^2} \\ &= \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big). \end{aligned}$$

REMARQUE.— *En particulier,*

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 u_n(x) = -2x \neq 1,$$

donc $u_n(x)$ n'est pas équivalent à $1/n^2$.

$\boxed{\textbf{11.c.}}$ L'ordre de grandeur trouvé à la question précédente prouve que la série de fonctions converge simplement sur $]0, 1[$.

● Vrai ❍ Faux

La série de référence $\sum 1/n^2$ est absolument convergente. Par comparaison, la série $\sum u_n(x)$ est aussi absolument convergente et donc (série réelle !) convergente.

$\boxed{\textbf{11.d.}}$ Cet ordre de grandeur prouve aussi que la série de fonctions converge normalement sur $]0,1[$.

❍ Vrai ● Faux

Bien sûr que non ! On a étudié l'ordre de grandeur de $u_n(x)$ en fixant x, on n'a même pas cherché *à majorer $|u_n(x)|$ par une quantité indépendante de x, il n'y a donc aucun moyen de conclure quant à la convergence normale.*

❧ *Cela dit, pour tout $n \geqslant 2$,*

$$\forall\, x \in]0,1[, \quad |u_n(x)| \leqslant \frac{2}{(n+x)(n-x)} \leqslant \frac{2}{n(n-1)}$$

donc la série $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ converge normalement sur $]0,1[$. Attention cependant ! Les fonctions u_0 et u_1 ne sont pas bornées sur l'intervalle $]0,1[$, on va avoir des surprises si on n'isole pas ces deux termes lors de l'étude de la somme !

12.

On considère la série de fonctions $\sum u_n$ avec

$$u_n(x) = \frac{\ln(1+n^2x^2)}{1+n^3}.$$

$\boxed{\textbf{12.a.}}$ Lorsque x tend vers 0,

$$u_n(x) \sim \frac{x^2}{n}.$$

❍ Vrai ● Faux

Dans cette question, le paramètre x tend vers 0, ce qui sous-entend que l'indice n est fixé. Donc le produit

$$u = n^2x^2$$

est un infiniment petit et d'après le développement limité à l'ordre 1 de la fonction $\ln$,

$$\ln(1+n^2x^2) \sim n^2x^2.$$

On en déduit que

$$u_n(x) \sim \frac{n^2}{n^3+1}\,x$$

mais comme n est fixé

$$u_n(x) \not\sim \frac{x}{n}.$$

NB : Ça n'a rien *à voir avec la convergence de la série !*

$\boxed{\textbf{12.b.}}$ Pour $x > 0$, lorsque n tend vers $+\infty$, on a

❏
$$u_n(x) \sim \frac{\ell n\, n}{n^3}$$

✔
$$u_n(x) \sim \frac{2\,\ell n\, n}{n^3}$$

✔
$$u_n(x) = \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$$

❏
$$u_n(x) = \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^3}\Big)$$

✔
$$u_n(x) = o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$$

Comme $x \neq 0$ et que n tend vers $+\infty$,

$$\begin{aligned} \ell n(1+n^2x^2) &= \ell n(n^2) + \ell n\Big(x^2 + \frac{1}{n^2}\Big) \\ &= 2\,\ell n\, n + 2\,\ell n|x| + o(1) \end{aligned}$$

(par continuité de ℓn au point $|x| > 0$) et donc

$$u_n(x) \sim \frac{2\,\ell n\, n}{n^3} = \frac{2\,\ell n\, n}{n} \cdot \frac{1}{n^2}.$$

Les autres ordres de grandeur s'en déduisent.

REMARQUE.— *Cet équivalent est faux pour $x = 0$, car dans ce cas (très) particulier,*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n(x) = 0.$$

$\boxed{\textbf{12.c.}}$ L'ordre de grandeur précédent prouve que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

❍ Vrai ● Faux

Faux, bien sûr, et pour les mêmes raisons : on a étudié $u_n(x)$ en fixant x, on n'a pas cherché à majorer $|u_n(x)|$ par une quantité indépendante de x.

$\boxed{\textbf{12.d.}}$ La série de fonctions $\sum u_n$

✔ converge normalement sur tout segment

❏ converge normalement sur $\mathbb{R}$

✔ converge normalement sur l'intervalle ouvert

$$]-A, A[$$

pour tout $A > 0$

❏ là, tout de suite, j'en sais rien et je ne veux pas répondre au hasard

Les fonctions u_n sont paires et croissantes *sur $\mathbb{R}_+$. Par conséquent, pour tout réel $A > 0$,*

$$\forall\, x \in [-A, A], \quad |u_n(x)| \leqslant |u_n(A)|$$

et la série de fonctions $\sum u_n$ converge donc normalement sur chaque segment $[-A, A]$ et a fortiori *sur chaque intervalle ouvert*

$$]-A, A[\, \subset [-A, A]$$

et sur tout segment (puisque chaque segment $[a, b]$ est contenu dans un segment $[-A, A]$ avec A suffisamment grand).

❧ *Les fonctions u_n ne sont pas bornées sur $\mathbb{R}$ (car elles tendent vers $+\infty$ au voisinage de $\pm\infty$) et cela s'oppose à la convergence normale sur $\mathbb{R}$.*