Lois de probabilités - mai 2020

1.

Une variable aléatoire discrète est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ ou dans une partie de $\mathbb{N}$.

❍ Vrai ❍ Faux

2.

On considère deux variables aléatoires

$$X, Y : \Omega \longrightarrow E$$

qu'on suppose de même loi.

2.a. Pour toute partie $A \subset E$,

$$[X \in A] = [Y \in A].$$

❍ Vrai ❍ Faux

2.b. Pour toute partie $A \subset E$,

$$\mathbf{P}(X \in A) = \mathbf{P}(Y \in A).$$

❍ Vrai ❍ Faux

2.c. Pour toute fonction $f : E \to F$,

$$f(X) \stackrel{\text{loi}}{=} f(Y).$$

❍ Vrai ❍ Faux

2.d. Si X est une variable aléatoire d'espérance finie, alors Y est aussi une variable aléatoire d'espérance finie et

$$\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(Y).$$

❍ Vrai ❍ Faux

3.

On considère deux variables aléatoires

$$X,\ Y\ :\ \Omega \longrightarrow E.$$

$\boxed{\textbf{3.a.}}$ On suppose que

$$\mathbf{P}(X \in A) = \mathbf{P}(Y \in A)$$

pour toute partie $A \subset E$. On peut en déduire que :

❏ $X = Y$

❏ $\mathbf{P}(X = Y) = 1$

❏ $X \overset{\text{loi}}{=} Y$

❏ Aucune de ces propriétés !

$\boxed{\textbf{3.b.}}$ On suppose que

$$[X \in A] = [Y \in A]$$

pour toute partie $A \subset E$. On peut en déduire que :

❏ $X = Y$

❏ $\mathbf{P}(X = Y) = 1$

❏ $X \overset{\text{loi}}{=} Y$

❏ Aucune de ces propriétés !

4.

S'il existe une fonction f telle que

$$f(X) \overset{\text{loi}}{=} f(Y),$$

alors

$$X \overset{\text{loi}}{=} Y.$$

❍ Vrai ❍ Faux

5.

On suppose que

$$X_1 \overset{\text{loi}}{=} Y_1 \quad \text{et que} \quad X_2 \overset{\text{loi}}{=} Y_2.$$

$\boxed{\textbf{5.a.}}$ Les couples (X_1, X_2) et (Y_1, Y_2) ont même loi.

❍ Vrai ❍ Faux

$\boxed{\textbf{5.b.}}$ Les variables aléatoires $X_1 + X_2$ et $Y_1 + Y_2$ ont même loi.

❍ Vrai ❍ Faux

5.c. Si X_1 et X_2 sont des variables aléatoires d'espérance finie, alors

$$\mathbf{E}(X_1 + X_2) = \mathbf{E}(Y_1 + Y_2)$$

❍ Vrai ❍ Faux

6.

On suppose que

$$(X_1, X_2) \overset{\text{loi}}{=} (Y_1, Y_2).$$

6.a. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes.

❍ Vrai ❍ Faux

6.b. Pour toute fonction f, les variables aléatoires

$$f(X_1, X_2) \quad \text{et} \quad f(Y_1, Y_2)$$

ont même loi.

❍ Vrai ❍ Faux

6.c. Pour toute fonction f bornée,

$$\mathbf{E}[f(X_1, X_2)] = \mathbf{E}[f(Y_1, Y_2)].$$

❍ Vrai ❍ Faux

6.d. On suppose que X_1 et X_2 admettent un moment d'ordre deux et sont décorrélées :

$$\mathbf{Cov}(X_1, X_2) = 0.$$

Alors Y_1 et Y_2 sont décorrélées :

$$\mathbf{Cov}(Y_1, Y_2) = 0.$$

❍ Vrai ❍ Faux

6.e. Les couples (X_1, Y_2) et (Y_1, X_2) ont même loi.

❍ Vrai ❍ Faux

7.

7.a. Si X est une variable aléatoire bornée, alors c'est une variable aléatoire d'espérance finie.

❍ Vrai ❍ Faux

7.b. La réciproque est vraie.

❍ Vrai ❍ Faux

$\boxed{\textbf{7.c.}}$ Si la variable aléatoire X ne prend qu'un nombre fini de valeurs différentes, alors elle est d'espérance finie.

❍ Vrai ❍ Faux

8.

On considère ici une variable aléatoire X à valeurs dans une partie finie ou dénombrable E de $\mathbb{R}$ et une fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

définie sur E (au moins).

$\boxed{\textbf{8.a.}}$ Pour démontrer que $Y = f(X)$ est une variable aléatoire d'espérance finie, il faut calculer la loi de $f(X)$.

❍ Vrai ❍ Faux

$\boxed{\textbf{8.b.}}$ Si X est une variable aléatoire bornée, alors $f(X)$ est une variable aléatoire d'espérance finie, quelle que soit la fonction f.

❍ Vrai ❍ Faux

$\boxed{\textbf{8.c.}}$ On admet que $f(X)$ est une variable aléatoire d'espérance finie. Pour calculer l'espérance de $f(X)$, il faut calculer la loi de $f(X)$.

❍ Vrai ❍ Faux

9.

On veut choisir un nombre entier au hasard dans $\mathbb{N}$. Par quelle loi de probabilité est-il naturel de modéliser cette expérience aléatoire ?

❏ La loi uniforme sur $\mathbb{N}$

❏ Une loi géométrique

❏ Une loi de Poisson