Rapport CCINP MP (3)

[25] La méthode évoquée par le rapport est une démarche classique par analyse et synthèse pour démontrer que les sous-espaces F et G sont supplémentaires dans E.

▶ Tout d'abord, on choisit un vecteur $x \in E$ et on suppose qu'il existe deux vecteurs

$$y \in F \qquad \text{et} \qquad z \in G$$

tels que

$$x = y + z.$$

Si les choses se passent bien, on arrive à en déduire une expression de y et de z en fonction de x.

Dans ce cas, on a déjà prouvé que F et G étaient en somme directe, puisque x admet *au plus une* décomposition.

C'est la partie délicate de la démonstration ! Ça ne réussit pas à tous les coups...

▶ Il reste ensuite à vérifier que l'unique décomposition possible de x est bien une décomposition de x, c'est-à-dire que les expressions trouvées pour y et z appartiennent effectivement aux sous-espaces F et G.

Cette partie est une simple vérification, elle ne pose en général aucun problème théorique, ni technique puisque l'essentiel a été fait pendant la première partie de la démonstration.

Cependant, du point de vue de la logique de la démonstration*, cette seconde partie est aussi importante que la première : si on omet cette partie de la démonstration, on ne prouve pas que les sous-espaces sont supplémentaires dans E !*

En effet, dans la première partie, on suppose *l'existence d'une décomposition et c'est seulement la seconde partie qui* établit *l'existence de cette décomposition.*

EXEMPLE.— Considérons $E = \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, $F = \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $G = A_n(\mathbb{K})$.
Analyse : Pour une matrice $M \in E$ quelconque, on suppose qu'il existe deux matrices

$$S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \quad \text{et} \quad A \in A_n(\mathbb{K})$$

telles que

$$M = S + A.$$

Par linéarité de la transposition, on en déduit que

$${}^tM = {}^tS + {}^tA = S - A.$$

Par conséquent, il faut que

$$S = \frac{M + {}^tM}{2} \quad \text{et} \quad A = \frac{M - {}^tM}{2}.$$

On a prouvé que les sous-espaces vectoriels F et G étaient en somme directe et de plus on a explicité l'unique décomposition possible de $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.
Synthèse : Pour une matrice $M \in E$ quelconque, on pose

$$S = \frac{M + {}^tM}{2} \quad \text{et} \quad A = \frac{M - {}^tM}{2}.$$

Il est clair que

$$\begin{aligned} & S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \quad \text{car} \quad {}^tS = S, \\ & A \in A_n(\mathbb{K}) \quad \text{car} \quad {}^tA = A, \\ \text{et} \quad & M = S + A, \end{aligned}$$

ce qui prouve que $E = F + G$ et donc que

$$E = F \oplus G.$$

[26] Raisonnons géométriquement dans le plan : deux droites sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$ si, et seulement si, elles sont distinctes (elles forment alors un *repère* du plan).

Pour une droite donnée $\mathscr{D}_1$, il existe une infinité de droites $\mathscr{D}_2$ distinctes de $\mathscr{D}_1$ et donc une infinité de sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathscr{D}_1$!

❧ La confusion vient probablement de la géométrie euclidienne : dans un espace euclidien, chaque sous-espace possède un, *et un seul,* supplémentaire orthogonal.

[27] Si E et F sont deux espaces vectoriels de dimension finie tels que

$$\dim E = \dim F,$$

alors toute application linéaire

$$f : E \to F$$

est bijective si, et seulement si, elle est injective (resp. surjective).

VARIANTE : .— Si E est un espace de dimension finie, tout endomorphisme $f \in L(E)$ est bijectif si, et seulement si, il est injectif (resp. surjectif).

❧ Si $f : E \to F$ est linéaire et que $\dim E \neq \dim F$, alors f ne peut pas être bijectif alors que f peut très bien être injectif :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(où on voit que $\dim E > \dim F$) ou surjectif :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(où on voit cette fois que $\dim E < \dim F$).

❧ Si $f \in L(E)$ où E est un espace de dimension infinie, alors f peut très bien être injective sans être bijective :

$$[P \mapsto XP] \quad \text{avec} \quad E = \mathbb{K}[X]$$

ou surjective sans être injective :

$$[f \mapsto f'] \quad \text{avec} \quad E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}).$$

[28] D'après le Cours, l'image de la matrice A est engendrée par les colonnes de A.

Le Théorème de la base incomplète nous assure qu'il suffit de retirer un certain nombre de vecteurs bien choisis d'une famille génératrice pour trouver une base.

❧ En pratique, il s'agit d'effectuer du pivot sur les colonnes de la matrice *(et uniquement sur les colonnes)* pour obtenir une matrice dont certaines colonnes seront échelonnées (ces colonnes-ci formeront une base de l'image) et les autres colonnes seront toutes nulles.

[29] Si f n'est pas un endomorphisme, le noyau de f est un sous-espace de l'espace de départ et l'image est un sous-espace de l'espace d'arrivée : il n'y a aucune chance pour que ces deux sous-espaces vectoriels soient supplémentaires !

❧ Si f est un endomorphisme de E, espace de dimension finie, alors $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont deux sous-espaces vectoriels de E tels que

$$\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f.$$

Par conséquent, $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont supplémentaires dans E si, et seulement si,

$$\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0_E\}.$$

❧ Pour n'importe quel automorphisme, on a

$$\operatorname{Ker} f = \{0_E\} \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} f = E$$

donc $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont supplémentaires dans E.

Plus intéressant ! Pour tout projecteur $p \in L(E)$, on a

$$E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Ker}(p - I_E).$$

Plus généralement, si $f \in L(E)$ est diagonalisable avec

$$\operatorname{Sp}(f) = \{\lambda_1 = 0, \lambda_2, \dots, \lambda_r\},$$

alors

$$E = \operatorname{Ker} p \oplus \underbrace{\left(\bigoplus_{k=2}^{r} \operatorname{Ker}(f - \lambda_k \cdot I_E)\right)}_{= \operatorname{Im} f}.$$

[30] Le seul intérêt du polynôme caractéristique est de nous donner les valeurs propres avec leurs multiplicités respectives. Autrement dit, il faut tout faire pour obtenir ce polynôme *sous forme factorisée*.

On en peut donc pas se reposer uniquement sur la règle de Sarrus ; d'autre part, le développement par une ligne ou par une colonne doit être utilisé avec discernement !

[31] Il importe de bien distinguer les caractérisations (CNS) des conditions suffisantes (CS).

Avec une condition suffisante (par ex : Théorème spectral), on démontre qu'un endomorphisme donné est diagonalisable et l'étude de l'endomorphisme sera bien plus simple après réduction.

Réduire *un endomorphisme consiste à le représenter sous la forme la plus simple possible.*

En particulier, réduire un endomorphisme diagonalisable consiste à expliciter une base de vecteurs propres pour représenter cette endomorphisme au moyen d'une matrice diagonale (= le plus simple des types de matrices).

Seule une caractérisation nous permet de traiter un exercice qui admet pour hypothèse de départ : "Soit u, un endomorphisme diagonalisable."

► Quelques caractérisations (grossièrement classées par ordre décroissant d'utilité)

▷ Le polynôme minimal est scindé à racines simples.

▷ Pour chaque vecteur $x \in E$, il existe une, et une seule, décomposition

$$x = \sum_{k=1}^{r} x_k$$

avec $u(x_k) = \lambda_k \cdot x_k$ pour tout $1 \leqslant k \leqslant r$.

▷

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Sp}(u)} \operatorname{Ker}(u - \lambda \cdot I_E)$$

(Formulation ensembliste de la caractérisation précédente)

▷ L'endomorphisme u est diagonalisable si, et seulement si, $\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ est diagonalisable (quelle que soit la base $\mathscr{B}$).

▷ Il existe une base de vecteurs propres.

▷ La somme des sous-espaces propres est égale à E.

▷

$$\dim E = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim \mathrm{Ker}(u - \lambda \cdot I_E)$$

▷ Le polynôme caractéristique est scindé et la multiplicité de chaque racine est égale à la dimension du sous-espace propre correspondant.

► Quelques conditions suffisantes (grossièrement classées par ordre d'utilité décroissante aussi)

▷ Si u est un endomorphisme symétrique, alors il est diagonalisable (et les sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux).

▷ Si A est une matrice symétrique RÉELLE, alors il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale Δ telles que

$$P^{-1}AP = {}^tPAP = \Delta.$$

▷ S'il existe un polynôme annulateur scindé à racines simples (qu'il s'agisse du polynôme minimal ou pas).

▷ Si $\dim E = d$ et si u admet d valeurs propres deux à deux distinctes, alors u est diagonalisable (et les sous-espaces propres sont tous des droites vectorielles).

▷ Si le polynôme caractéristique est scindé à racines simples... (variante des deux précédentes)

▷ Si A est diagonalisable, alors $\exp(A)$ est diagonalisable (avec la même matrice de passage).

[32] Une condition suffisante (le polynôme caractéristique est scindé à racines simples) n'est pas une caractérisation.

❧ **Contre-exemples géométriques**

Les projecteurs et les symétries sont diagonalisables bien que leurs polynômes caractéristiques aient des racines multiples.

Les polynômes caractéristiques des matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

sont respectivement égaux à $X^2(X-1)^2$ et à $(X-1)^2(X+1)^2$ bien que les matrices soient diagonales.

❧ Il est bon de retenir qu'<u>il suffit</u> de connaître le polynôme **minimal** de u pour savoir si u est diagonalisable ou pas : *l'endomorphisme u est diagonalisable si, et seulement si, son polynôme minimal est scindé à racines simples.*

❧ Il est bon de se souvenir que, au contraire, <u>il ne suffit pas</u> de connaître le polynôme caractéristique pour savoir si u est diagonalisable ou pas.

D'après **[Ch.10 - 90]**, u est diagonalisable si, et seulement si,

- d'une part, le polynôme caractéristique est scindé
- et d'autre part, la multiplicité de chacune de ses racines est égale à la dimension du sous-espaces propre associé.

Lorsque les racines du polynôme caractéristique sont deux à deux distinctes, la condition sur les dimensions est automatiquement satisfaite — et c'est pour cela qu'on a tendance à l'oublier...

[33] Si le sous-espace F est stable par $u \in L(E)$, alors on peut définir un autre endomorphisme

$$u_F \in L(F)$$

en posant

$$\forall\, x \in F, \quad u_F(x) = \underbrace{u(x)}_{\in F}.$$

L'application linéaire u_F est appelée **endomorphisme (de F) induit par restriction de u.**

Cette application linéaire n'est pas une simple restriction !

En effet, la restriction de u à F est l'application

$$u_{|F} \in L(F, E)$$

définie par

$$\forall\, x \in F, \quad u_{|F}(x) = u(x).$$

NB : cette restriction n'est pas d'un endomorphisme !

Dès qu'on connaît un sous-espace F stable par u, on doit systématiquement *mener l'étude de u dans une base adaptée à F.*

Sinon, c'est gâcher !

❧ Une base adaptée au sous-espace vectoriel F est construite en deux temps :
- on choisit une base $\mathscr{B}_F$ de F (possible car F est un espace de dimension finie)
- qu'on complète ensuite en une base $\mathscr{B}$ de E (Thm de la base incomplète).

$$\begin{aligned} F &= \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_r) & \mathscr{B}_F &= (e_1, \dots, e_r) \\ E &= \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_r, \dots, e_d) & \mathscr{B} &= (e_1, \dots, e_r, \dots, e_d) \end{aligned}$$

La stabilité de F par u se traduit par le fait que la matrice de u relative à une telle base $\mathscr{B}$ est triangulaire par blocs.

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

où

$$A = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_F}(u_F) \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix} = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_F, \mathscr{B}}(u_{|F}).$$

[34] L'expression $A^2 + 3A + I_3$ n'est pas un polynôme, c'est une *matrice* !

❧ L'expression $X^2 + 3X + 1 = 0$ n'est pas un polynôme, c'est une *égalité* (entre polynômes) et cette égalité est fausse : un polynôme de degré 2 ne peut pas être égal au polynôme nul !

❧ Certains endomorphismes admettent 0 pour seul polynôme annulateur.

Mais un endomorphisme qui possède un polynôme minimal possède une infinité de polynômes annulateurs : son polynôme minimal et *tous* les multiples du polynôme minimal.

Il est dans ce cas absurde de parler *du* polynôme annulateur.

❧ Pour une matrice carrée $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, il y a trois types de polynômes annulateurs.
- **Le polynôme minimal** est le polynôme annulateur unitaire de plus bas degré possible. D'après le Théorème de Cayley-Hamilton, son degré est inférieur à n.
- **Le polynôme caractéristique** est unitaire et son degré est toujours égal à n.
- *Les autres polynômes minimaux,* qui sont les polynômes divisibles par le polynôme minimal. Leur degré est donc supérieur au degré du polynôme minimal et peut très bien être supérieur à n.

[35] En appliquant le polynôme $P = X^2 + 3X + 1$ à l'endomorphisme u, on obtient l'endomorphisme

$$P(u) = u^2 + 3u + I_E\,.$$

Par définition, le polynôme P est un polynôme annulateur de u si, et seulement si, l'endomorphisme $P(u)$ est l'endomorphisme nul :

$$P(u) = \omega$$

c'est-à-dire
$$\forall\, x \in E, \quad [P(u)](x) = 0_E.$$
Cette relation peut aussi s'écrire
$$(u^2 + 3u + I_E)(x) = u^2(x) + u(x) + x = 0_E.$$
❧ L'expression $(u(x))^2 + 3u(x) + 1$ n'a aucun sens dans un espace vectoriel : 1 est un scalaire et non un vecteur ; $u(x)$ en tant que vecteur ne saurait être élevé au carré, il n'y a pas de multiplication dans un espace vectoriel ! (Il n'y a que des combinaisons linéaires.)

Pour les mêmes raisons, l'expression $P\big(u(x)\big)$ n'a aucun sens.

❧ La méthode classique consiste à calculer A^2 pour tenter de trouver une relation de liaison entre I, A et A^2.

Si la famille (I, A, A^2) est libre, on calcule A^3 et on essaie cette fois de trouver une relation de liaison entre I, A, A^2 et A^3.

Et ainsi de suite !

On trouve ainsi un polynôme annulateur dont le degré est minimal. Si ce polynôme est unitaire, c'est donc le polynôme minimal de la matrice !

On sait que le degré du polynôme minimal est inférieur à la taille de la matrice (théorème de Cayley-Hamilton). Pour fastidieux qu'il soit, ce procédé n'est pas exagérément long.

[36] Par **[Ch.10 - 51]**, si P est un polynôme annulateur de u, alors toutes les valeurs propres de u sont **des** racines de P.

❧ Cas particuliers : les valeurs propres de u sont **les** racines du polynôme minimal et du polynôme caractéristique.

❧ Cas général : un polynôme P est un polynôme annulateur de u si, et seulement si, c'est un multiple du polynôme minimal μ_u **[Ch.10 - 123]**.

On peut donc factoriser un polynôme annulateur P sous la forme
$$P = \mu_u \times Q.$$
Les racines de P qui sont racines de μ_u sont les valeurs propres de u ; mais les racines de P qui sont racines de Q n'ont *a priori* aucun lien avec le spectre de u.

❧ Ainsi, le polynôme
$$X(X-1)(X+1)(X-2)$$
est un polynôme annulateur de n'importe quel projecteur et de n'importe quelle symétrie, alors que ni -1, ni 2 ne sont valeurs propres d'un projecteur et que ni 0, ni 2 ne sont valeurs propres d'une symétrie.

Les projecteurs et les symétries sont des sources inépuisables d'exemples et de contre-exemples...

[37] Chaque sous-espace propre de u est stable par u et pour cette raison (cf **[33]** un peu plus haut), la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre λ est majorée par la multiplicité de λ en tant que racine du polynôme caractéristique.

Cf **[Ch.10 - 77]** pour les détails.

❧ Si on cherche un endomorphisme pour lequel la dimension du sous-espace propre n'est pas égale à la multiplicité de la valeur propre, c'est nécessairement un endomorphisme qui **n'est pas** diagonalisable **[31]**.

*Les endomorphismes **nilpotents** sont les prototypes des endomorphismes qui ne sont pas diagonalisables.*

*On doit savoir qu'un tel endomorphisme est trigonalisable **[Ch.10 - V.2]**.*

Pour chacune des matrices suivantes, la multiplicité de 0 en tant que valeur propre est égale à 4.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les dimensions du noyau sont égales à 1, 2, 2 et 3 respectivement.