[22] D'une manière générale, l'hypothèse de domination consiste à majorer la valeur absolue d'une expression de la variable $t \in I$ et d'un autre paramètre par une fonction indépendante du paramètre et intégrable sur I en tant que fonction de la variable t.

❧ **Théorème de convergence dominée [Ch.8 - 95]**
Il existe une fonction g, intégrable sur I, telle que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, t \in I, \quad \left|f_n(t)\right| \leqslant \underbrace{g(t)}_{\text{indépendant de } n}.$$

❧ **Théorème de continuité [Ch.9 - 15, 17]**
Il existe une fonction g, intégrable sur I, telle que

$$\forall\, x \in \Omega,\ \forall\, t \in I, \quad \left|f(x,t)\right| \leqslant \underbrace{g(t)}_{\text{indépendant de } x}.$$

❧ **Théorème de dérivation [Ch.9 - 23, 26]**
Il existe une fonction g, intégrable sur I, telle que

$$\forall\, x \in \Omega,\ \forall\, t \in I, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \underbrace{g(t)}_{\text{indépendant de } x}.$$

► **Domination locale**

On considère une fonction f, définie sur le produit $\Omega \times I$, et on définit la fonction F sur Ω en posant

$$\forall\, x \in \Omega, \qquad F(x) = \int_I f(x,t)\,dt.$$

L'objectif est donc d'étudier la régularité (continuité, dérivabilité...) de F sur son ensemble de définition Ω.

Deux cas se présentent.

❧ Il peut arriver que la propriété de domination soit vérifiée sur Ω comme on l'a écrit ci-dessus. C'est assez rare, mais au cas où cela est vérifié, on déduit immédiatement du théorème de continuité (resp. du théorème de dérivabilité) que F est continue (resp. de classe $\mathscr{C}^1$) sur Ω.

❧ La plupart du temps, il est **impossible** d'établir la propriété de domination pour $x \in \Omega$.

Concrètement, cela signifie qu'une fonction dominante g indépendante de $x \in \Omega$ n'est pas intégrable sur I.

En pareil cas, on cherche pourquoi la domination est impossible sur Ω, on s'efforce d'en déduire une famille $(V_k)_{k\in A}$ de parties de Ω telles que

$$\Omega = \bigcup_{k\in A} V_k$$

(ce qu'on appelle un **recouvrement** de Ω) et on se contente, pour tout $k \in A$ fixé, d'établir la propriété de domination sur V_k.

$$\forall\, k \in A,\ \boxed{\forall\, x \in V_k,}\ \forall\, t \in I, \quad \left|f(x,t)\right| \leqslant \underbrace{g_k(t)}_{\text{indépendant de } x}.$$

Pour établir la domination sur V_k, on travaille en fixant l'indice k et la fonction dominante peut dépendre de k.

Le théorème de continuité prouve alors que la fonction F est continue sur chaque partie V_k. Cette fonction F est donc continue sur Ω.

L'objectif est ainsi atteint de manière détournée, en vérifiant la condition de domination ***localement*** *(= avec une fonction dominante g_k pour chaque partie V_k) et non pas* ***globalement*** *(= avec une seule fonction dominante g sur Ω tout entier).*

Cette méthode s'applique aussi avec le Théorème de dérivation, car la classe $\mathscr{C}^1$, comme la continuité, est une propriété locale.

[23] Il y a deux manières de calculer une dérivée partielle.

▶ En général, l'expression $f(x,y)$ est définie au moyen d'opérations usuelles (combinaisons linéaires, produit, composition...) portant sur des fonctions de référence (sin, ℓn, exp...).

Dans ce cas, on peut calculer les dérivées partielles en appliquant les règles habituelles du calcul des dérivées, en traitant toutes les variables sauf une comme des paramètres fixés.

▶ Parfois, l'expression $f(x,y)$ est définie par morceaux : une expression algébrique pour $(x,y) \neq (0,0)$ et une valeur particulière pour $(x,y) = (0,0)$:

$$f(0,0) = z_0.$$

Dans ce cas, la seule manière de calculer les dérivées partielles au point $M_0 = (0,0)$ consiste à revenir à la définition des dérivées partielles : on forme le taux d'accroissement

$$\frac{f(0+x,0)-f(0,0)}{x-0} \quad \text{ou} \quad \frac{f(0,0+y)-f(0,0)}{y-0}$$

et on fait tendre l'accroissement vers 0 :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(0+x,0)-f(0,0)}{x-0},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,0+y)-f(0,0)}{y-0}.$$

On trouvera des exemples concrets de calculs dans les exercices de la banque CCINP.

[52.1] Loi d'une variable aléatoire discrète

L'étude de la loi d'une variable aléatoire discrète X s'effectue en deux temps.

– Tout d'abord, il faut identifier clairement l'**ensemble des valeurs prises** par X, c'est-à-dire l'image de Ω par l'application X.
$$E = X(\Omega) = \{X(\omega),\ \omega \in \Omega\}$$
– Ensuite, il faut déterminer la **probabilité de chacune de ces valeurs**.
$$\forall\, x \in E, \quad \mathbf{P}(X = x) = \dots$$

Et c'est tout.

[53.2] Loi d'une somme de variables aléatoires

La formule citée par le rapport

$$\mathbf{P}(X+Y=n) = \mathbf{P}([X=k] \cap [Y=n-k])$$

est *absurde* car le second membre fait apparaître un paramètre k qui n'existe pas au premier membre.

▷ **Ensemble des valeurs prises**

Si X et Y sont des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, il est clair que la somme $X+Y$ est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

▷ **Probabilité de chaque valeur**

Pour chaque valeur prise $n \in \mathbb{N}$, il reste à calculer la probabilité

$$\mathbf{P}(X+Y=n).$$

Pour cela, on analyse l'événement $[X+Y=n]$ au moyen des systèmes complets associés aux variables aléatoires X et Y : l'équivalence logique

$$X(\omega)+Y(\omega)=n \iff \exists\, k\in\mathbb{N}, \quad \begin{cases} X(\omega) &= k \\ Y(\omega) &= n-k \end{cases}$$

se traduit par une égalité ensembliste

$$[X+Y=n]=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\big([X=k]\cap[Y=n-k]\big).$$

Il est clair que les événements qui apparaissent dans l'union sont deux à deux disjoints (à cause du système complet d'événements associé à X) et que les événements indexés par un entier $k>n$ sont impossibles (puisque Y prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$). On a donc

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\quad [X+Y=n]=\bigsqcup_{k=0}^{n}\big([X=k]\cap[Y=n-k]\big)$$

et par additivité de $\mathbf{P}$, on en déduit que

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\quad \mathbf{P}(X+Y=n)=\sum_{k=0}^{n}\mathbf{P}\big([X=k]\cap[Y=n-k]\big). \qquad (\star)$$

Pour calculer (et simplifier) la somme du second membre, il faut connaître la loi conjointe de X et de Y, c'est-à-dire la famille des probabilités

$$\big(\mathbf{P}(X=x,Y=y)\big)_{(x,y)\in\mathbb{N}^2}.$$

Il arrive très souvent que les variables X et Y soient indépendantes, mais ce n'est pas une nécessité !

► **Applications**

La formule $(\star)$ permet d'établir de très propriétés importantes, dites **propriétés de stabilité**.

Ces propriétés doivent être connues (elles sont très utiles), ainsi que leur démonstration (elles ne sont pas au programme).

▷ Si X_1, ..., X_n sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes la loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$, alors la somme

$$S_n=X_1+\cdots+X_n$$

suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$.

▷ Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes qui suivent respectivement la loi binomiale $\mathscr{B}(n_1,p)$ et $\mathscr{B}(n_2,p)$, alors la somme $X+Y$ suit la loi binomiale

$$\mathscr{B}(n_1+n_2,p).$$

▷ Si X_1, ..., X_n sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent respectivement les lois de Poisson $\mathscr{P}(\lambda_1)$, ..., $\mathscr{P}(\lambda_n)$, alors la somme

$$S_n=X_1+\cdots+X_n$$

suit la loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)$.

[53.3] Les lois usuelles vraiment importantes sont : les lois de Bernoulli (tout a commencé en jouant à Pile ou Face) ; les lois binomiales (pour compter le nombre de succès) ; les lois de Poisson (pour compter les événements rares) ; les lois géométriques (pour mesurer le temps d'attente avant le premier succès).

► **Espérances et variances**

▷ L'espérance d'une **loi de Bernoulli** est son paramètre p et sa variance pq. Si la probabilité de succès p est proche de 0 ou proche de 1, une variable de Bernoulli est très peu aléatoire, il est logique que, dans ce cas, la variance soit proche de 0.

▷ La **loi binomiale** $\mathscr{B}(n, p)$ est la loi d'une somme

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

de variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes la loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$.

Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}(X_1 + \cdots + X_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}(X_i) = np$$

et par indépendance des X_k,

$$\mathbf{V}(X_1 + \cdots + X_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{V}(X_i) = npq.$$

▷ La **loi de Poisson** $\mathscr{P}(\lambda)$ est en un certain sens la limite de la loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$ lorsque $n \to +\infty$ et $np \to \lambda$. On a donc aussi $q = 1 - p \to 1$ et il se trouve que

$$\mathbf{E}(X) = \lambda = \lim_{n \to +\infty} np,$$
$$\mathbf{V}(X) = \lambda = \lim_{n \to +\infty} npq.$$

Attention, ce n'est pas une démonstration : je n'affirme pas que la convergence en loi implique la convergence en moyenne et la convergence en moyenne quadratique — d'ailleurs, c'est faux en général.

Je me borne à observer que l'analogie entre lois binomiales et lois de Poisson va jusqu'aux moments d'ordre 1 *et* 2*. Rien de plus ! — mais c'est très pratique pour retenir les formules.*

▷ Plus le paramètre de succès p est proche de 0, plus longtemps il faudra attendre avant de réussir. Il est donc tout à fait logique que l'espérance de la **loi géométrique** $\mathscr{G}(p)$ soit $1/p$.

La variance de la loi $\mathscr{G}(p)$ est égale à q/p^2, mais je ne connais pas de moyen d'en faciliter la mémorisation.

► **Exemple** Si $X : \Omega \to \mathbb{N}^*$ suit la loi géométrique, alors

$$Y = X - 1 : \Omega \to \mathbb{N}$$

est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ (**ensemble des valeurs prises**) avec

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(Y = n) = pq^n$$

puisque

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad [Y = n] = [X - 1 = n] = [X = n + 1].$$

La *loi* de Y est ainsi connue.

Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}(Y) = \mathbf{E}(X - 1) = \mathbf{E}(X) - 1 = \frac{q}{p}$$

puisqu'on connaît l'espérance de la variable géométrique X.

Par **[Ch.14 - 81.1]**,

$$\mathbf{V}(Y) = \mathbf{V}(X - 1) = \mathbf{V}(X) = \frac{q}{p^2}$$

puisqu'on connaît la variance de la variable géométrique X.

Cet exemple élémentaire cherche à vous montrer qu'on calcule rarement l'espérance ou la variance d'une variable aléatoire discrète en cherchant la somme d'une série et beaucoup plus souvent en utilisant les règles de calculs sur $\mathbf{E}$ *et sur* $\mathbf{V}$ *pour se ramener à des quantités (normalement) biens connues.*