Lois de probabilités - mai 2020

Les questions indexées par des numéros différents sont indépendantes.
Toutes les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé

$$(\Omega, \Theta, \mathbf{P}).$$

1.

Une variable aléatoire discrète est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ ou dans une partie de $\mathbb{N}$.

❍ Vrai ● Faux

Effectivement, la plupart des variables aléatoires discrètes rencontrées prennent des valeurs entières, mais la définition **[Ch.14 - 7]** *dit seulement que l'ensemble des valeurs prises est un ensemble fini ou dénombrable.*
Le mieux est de penser à la ***fonction génératrice*** *d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, qui fait apparaître les variables t^X pour $t \in [0,1]$: les valeurs prises par t^X appartiennent alors à l'ensemble*

$$\{t^n,\ n \in \mathbb{N}\}.$$

2.

On considère deux variables aléatoires

$$X,\ Y\ :\ \Omega \longrightarrow E$$

qu'on suppose de même loi.
D'après la définition **[Ch.14 - 13]** *et* **[Ch.14 - 9.3]**, *les variables aléatoires X et Y discrètes ont* ***même loi*** *si, et seulement si, elles prennent les mêmes valeurs :*

$$X\ :\ \Omega \to E \quad \textit{et} \quad Y\ :\ \Omega \to E$$

avec les mêmes probabilités :

$$\forall\, u \in E, \quad \mathbf{P}(X = u) = \mathbf{P}(Y = u).$$

Cf aussi **[Ch.14 - 14.1]**.
❧ *Cette propriété ne nous permet pas de comparer les valeurs de $X(\omega)$ et de $Y(\omega)$, seule la* ***loi (jointe) du couple*** *(X, Y), caractérisée par les probabilités*

$$\big(\mathbf{P}(X = u, Y = v)\big)_{(u,v)\in E\times E},$$

permet de le faire.

$\boxed{\textbf{2.a.}}$ Pour toute partie $A \subset E$,

$$[X \in A] = [Y \in A].$$

❍ Vrai ● Faux

Si on se restreint au cas où $A = \{x_0\}$, l'égalité des événements signifie que

$$\forall\, \omega \in \Omega, \quad X(\omega) = x_0 \iff Y(\omega) = x_0.$$

Cette égalité étant vraie pour tout $x_0 \in E$ (puisque A est quelconque), on en déduit que

$$\forall\, \omega \in \Omega, \quad X(\omega) = Y(\omega).$$

L'égalité des fonctions X et Y (= les deux v.a. prennent les mêmes valeurs en toutes circonstances*) est infiniment plus forte que l'égalité en loi (= les deux v.a. prennent les mêmes valeurs* avec les mêmes fréquences*).*

$\boxed{\textbf{2.b.}}$ Pour toute partie $A \subset E$,

$$\mathbf{P}(X \in A) = \mathbf{P}(Y \in A).$$

● Vrai ❍ Faux

D'après la définition **[Ch.14 - 5.3]***, l'égalité de l'énoncé signifie exactement que la loi de X est égale à la loi de Y.*

$\boxed{\textbf{2.c.}}$ Pour toute fonction $f : E \to F$,

$$f(X) \overset{\text{loi}}{=} f(Y).$$

● Vrai ❍ Faux

Conséquence de **[Ch.14 - 31]**.

$\boxed{\textbf{2.d.}}$ Si X est une variable aléatoire d'espérance finie, alors Y est aussi une variable aléatoire d'espérance finie et

$$\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(Y).$$

● Vrai ❍ Faux

Cas particulier du théorème **[Ch.14 - 44.1]**.

3.

On considère deux variables aléatoires

$$X, Y : \Omega \longrightarrow E.$$

$\boxed{\textbf{3.a.}}$ On suppose que

$$\mathbf{P}(X \in A) = \mathbf{P}(Y \in A)$$

pour toute partie $A \subset E$. On peut en déduire que :

❏ $X = Y$

❏ $\mathbf{P}(X = Y) = 1$

✔ $X \overset{\text{loi}}{=} Y$

❏ Aucune de ces propriétés !

La question a déjà été posée sous une autre forme !

$\rightarrow$ $\boxed{\textbf{2.a, 2.b}}$

$\boxed{\textbf{3.b.}}$ On suppose que

$$[X \in A] = [Y \in A]$$

pour toute partie $A \subset E$. On peut en déduire que :

✔ $X = Y$

✔ $\mathbf{P}(X = Y) = 1$

✔ $X \overset{\text{loi}}{=} Y$

❏ Aucune de ces propriétés !

Comme on l'a déjà vu au $\boxed{\textbf{2.a}}$*, dans ce cas, les variables aléatoires X et Y sont* ***égales en tant que fonctions*** *:*

$$[X = Y] = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = Y(\omega)\} = \Omega.$$

Comme $\mathbf{P}(\Omega) = 1$*, on en déduit qu'elles sont donc* ***égales presque partout***

$$\mathbf{P}(X = Y) = 1$$

et a fortiori *qu'elles sont* ***égales en loi*** **[Ch.14 - 14.1]**

$$\forall u \in E, \quad \mathbf{P}(X = u) = \mathbf{P}(Y = u).$$

4.

S'il existe une fonction f telle que

$$f(X) \overset{\text{loi}}{=} f(Y),$$

alors

$$X \overset{\text{loi}}{=} Y.$$

❍ Vrai ● Faux

Si la fonction f n'est pas injective, il se peut que X et Y ne prennent pas les mêmes valeurs alors que $f(X)$ et $f(Y)$ prennent les mêmes valeurs.

❧ Contre-exemple exagéré : *si f est la fonction identiquement nulle, alors $f(X) = f(Y)$ (égalité en tant que fonctions, puisque ces deux fonctions sont constantes), quelles que soient les variables aléatoires X et Y.*

❧ Contre-exemple raisonnable : *si $X = G - 1$ où G suit la loi géométrique de paramètre p et si Y suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda = -\ln p$, alors les variables*

$$f(X) = \mathbb{1}_{[X>0]} \quad \textit{et} \quad f(Y) = \mathbb{1}_{[Y>0]}$$

suivent la loi de Bernoulli de paramètre

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X > 0) = \mathbf{P}(G > 1) &= 1 - p = 1 - e^{-\lambda} \\ &= \mathbf{P}(Y > 0). \end{aligned}$$

Les deux variables $f(X)$ et $f(Y)$ sont donc égales en loi alors que X et Y ne suivent pas la même loi :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X = 1) &= \mathbf{P}(G = 2) = p(1 - p) \\ \mathbf{P}(Y = 1) &= e^{-\lambda}\lambda = -p \ln p \\ &\neq \mathbf{P}(X = 1). \end{aligned}$$

5.

On suppose que

$$X_1 \overset{\text{loi}}{=} Y_1 \quad \text{et que} \quad X_2 \overset{\text{loi}}{=} Y_2.$$

5.a. Les couples (X_1, X_2) et (Y_1, Y_2) ont même loi.

❍ Vrai ● Faux

La connaissance des lois marginales ne suffit pas pour connaître la loi du couple. → **[Ch.15 - 11, 12]**

Contre-exemple : *Considérons deux variables aléatoires* U *et* V *indépendantes et de même loi* $\mathscr{B}(1/2)$ *et posons*

$$X_1 = X_2 = Y_1 = U, \quad Y_2 = V.$$

Il est clair que X_1 *et* Y_1 *ont même loi (ces variables sont même égales en tant que fonctions). D'autre part, comme* U *et* V *ont même loi, les variables* $X_2 = U$ *et* $Y_2 = V$ *sont bien égales en loi.*
Dans ces conditions,

$$[X_1 = 1, X_2 = 0] = [U = 1] \cap [U = 0] = \varnothing$$

donc

$$\mathbf{P}(X_1 = 1, X_2 = 0) = 0.$$

D'autre part,

$$[Y_1 = 1, Y_2 = 0] = [U = 1] \cap [V = 0]$$

donc, par indépendance de U *et* V*,*

$$\mathbf{P}(Y_1 = 1, Y_2 = 0) = \mathbf{P}(U = 1)\,\mathbf{P}(V = 0) = \frac{1}{4}.$$

On a donc

$$\mathbf{P}(X_1 = 1, X_2 = 0) \neq \mathbf{P}(Y_1 = 1, Y_2 = 0)$$

ce qui suffit **[Ch.15 - 8.3]** *pour démontrer que les couples* (X_1, X_2) *et* (Y_1, Y_2) *n'ont pas même loi.*

5.b. Les variables aléatoires $X_1 + X_2$ et $Y_1 + Y_2$ ont même loi.

❍ Vrai ● Faux

On reprend le contre-exemple précédent.
La variable $X_1 + X_2$ *ne prend que deux valeurs :*

$$[X_1 + X_2 = 0] = [U = 0] \qquad [X_1 + X_2 = 2] = [U = 1]$$

avec la même probabilité :

$$\mathbf{P}(X_1 + X_2 = 0) = \mathbf{P}(X_1 + X_2 = 2) = 1/2.$$

Par **[Ch.15 - 28.2]***, La variable* $Y_1 + Y_2$ *suit la loi binomiale* $\mathscr{B}(2, 1/2)$ *et prend donc trois valeurs :*

$$\mathbf{P}(Y_1 + Y_2 = 0) = 1/4,$$
$$\mathbf{P}(Y_1 + Y_2 = 1) = 1/2,$$
$$\mathbf{P}(Y_1 + Y_2 = 2) = 1/4.$$

5.c. Si X_1 et X_2 sont des variables aléatoires d'espérance finie, alors

$$\mathbf{E}(X_1 + X_2) = \mathbf{E}(Y_1 + Y_2)$$

● Vrai ❍ Faux

Par **[Ch.14 - 44.1]**, Y_1 *et* Y_2 *sont aussi des variables aléatoires d'espérance finie et*

$$\mathbf{E}(Y_1) = \mathbf{E}(X_1), \quad \mathbf{E}(Y_2) = \mathbf{E}(X_2).$$

Par linéarité de l'espérance **[Ch.14 - 52]**,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(X_1 + X_2) &= \mathbf{E}(X_1) + \mathbf{E}(X_2)\\ &= \mathbf{E}(Y_1) + \mathbf{E}(Y_2) = \mathbf{E}(Y_1 + Y_2).\end{aligned}$$

Il n'est pas nécessaire de connaître la loi du couple pour calculer l'espérance de la somme.
Des variables aléatoires de lois différentes peuvent avoir une même espérance (de même qu'on peut déplacer des masses au sein d'un système pesant sans déplacer le centre de gravité de ce système).

6.

On suppose que

$$(X_1, X_2) \overset{\text{loi}}{=} (Y_1, Y_2).$$

6.a. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes.

❍ Vrai ● Faux

On ne connaît pas la loi du couple (X_1, X_2) *qui, seule, nous permettrait de répondre à cette question.*

La réponse Faux *n'est pas tout à fait exacte, la réponse correcte est* Impossible de savoir. *Mais en pareilles circonstances, il vaut mieux pécher par excès de prudence !*

6.b. Pour toute fonction f, les variables aléatoires

$$f(X_1, X_2) \quad \text{et} \quad f(Y_1, Y_2)$$

ont même loi.

● Vrai ❍ Faux

Même question qu'au **2.c** *sous une forme à peine différente, en prenant*

$$X = (X_1, X_2) \quad \textit{et} \quad Y = (Y_1, Y_2).$$

On rappelle **[Ch.15 - 3 & 16]** *à ce propos qu'une famille finie de* n *variables aléatoires à valeurs réelles doit être considérée comme une variable aléatoire à valeurs dans* $\mathbb{R}^n$*, ce qu'on appelé un* ***vecteur aléatoire***.

$\boxed{\textbf{6.c.}}$ Pour toute fonction f bornée,

$$\mathbf{E}[f(X_1, X_2)] = \mathbf{E}[f(Y_1, Y_2)].$$

● Vrai ❍ Faux

Si f est une fonction bornée, alors $f(X_1, X_2)$ est une variable aléatoire bornée et donc **[Ch.14 - 57]** *d'espérance finie.*
D'après la question précédente, $f(Y_1, Y_2)$ a même loi que $f(X_1, X_2)$, donc **[Ch.14 - 44.1]** *c'est aussi une variable aléatoire d'espérance finie et les deux espérances sont égales.*

$\boxed{\textbf{6.d.}}$ On suppose que X_1 et X_2 admettent un moment d'ordre deux et sont décorrélées :

$$\mathbf{Cov}(X_1, X_2) = 0.$$

Alors Y_1 et Y_2 sont décorrélées :

$$\mathbf{Cov}(Y_1, Y_2) = 0.$$

● Vrai ❍ Faux

Tout d'abord, $Y_1^2 \overset{loi}{=} X_1^2$ et $Y_2^2 \overset{loi}{=} X_2^2$ par $\boxed{\textbf{2.c}}$ avec

$$f(t) = t^2.$$

D'après **[Ch.14 - 44.1]**, *les variables Y_1 et Y_2 admettent un moment d'ordre deux et leur covariance est donc bien définie* **[Ch.14 - 84.2]**.
❧ *Toujours avec* **[Ch.14 - 44.1]**, *on sait que*

$$\mathbf{E}(Y_1) = \mathbf{E}(X_1) \quad \textit{et} \quad \mathbf{E}(Y_2) = \mathbf{E}(X_2)$$

et d'après la formule de Koenig–Huyghens

$$\begin{aligned} \mathbf{Cov}(X_1, X_2) &= \mathbf{E}(X_1 X_2) - \mathbf{E}(X_1)\,\mathbf{E}(X_2), \\ \mathbf{Cov}(Y_1, Y_2) &= \mathbf{E}(Y_1 Y_2) - \mathbf{E}(Y_1)\,\mathbf{E}(Y_2) \\ &= \mathbf{E}(Y_1 Y_2) - \mathbf{E}(X_1)\,\mathbf{E}(X_2). \end{aligned}$$

En posant

$$g(u, v) = uv - \mathbf{E}(X_1)\,\mathbf{E}(X_2),$$

on déduit de $\boxed{\textbf{6.b}}$ que les variables $g(X_1, X_2)$ et $g(Y_1, Y_2)$ ont même loi et comme elles sont d'espérance finie, elles ont donc même espérance.
❧ *En conclusion, $\mathbf{Cov}(X_1, X_2) = \mathbf{Cov}(Y_1, Y_2)$ et l'équivalence s'en déduit immédiatement.*

$\boxed{\textbf{6.e.}}$ Les couples (X_1, Y_2) et (Y_1, X_2) ont même loi.

❍ Vrai ● Faux

Impossible de le savoir ! Il faudrait connaître la loi du vecteur aléatoire

$$(X_1, X_2, Y_1, Y_2)$$

pour en décider.
À défaut de cette information, il est prudent de faire comme si la propriété était fausse.

❧ Contre-exemple :
Considérons trois variables aléatoires indépendantes U, V *et* W *qui suivent toutes la loi* $\mathscr{B}(1/2)$ *et posons*

$$X_1 = Y_2 = U, \quad Y_1 = V, \quad X_2 = W.$$

Il est clair que les vecteurs aléatoires

$$(X_1, X_2) = (U, W) \quad \textit{et} \quad (Y_1, Y_2) = (V, U)$$

suivent la même loi, celle d'un couple de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathscr{B}(1/2)$.
En revanche, les couples

$$(X_1, Y_2) = (U, U) \quad \textit{et} \quad (Y_1, X_2) = (V, W)$$

ne suivent pas la même loi : le couple (Y_1, X_2) *est encore un couple de variables aléatoires indépendantes de loi* $\mathscr{B}(1/2)$ *tandis que* (X_1, Y_2) *n'est pas un couple de variables aléatoires indépendantes !*
Concrètement,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}[(X_1, Y_2) = (1, 0)] &= \mathbf{P}(U = 1, U = 0) \\
&= \mathbf{P}(\varnothing) = 0 \\
\mathbf{P}[(Y_1, X_2) = (1, 0)] &= \mathbf{P}(V = 1, W = 0) \\
&= \mathbf{P}(V = 1)\,\mathbf{P}(W = 0) = 1/4.
\end{aligned}$$

❧ Contre-contre-exemple :
Si les variables aléatoires X_1, X_2, Y_1 *et* Y_2 *sont indépendantes et suivent toutes la même loi qu'une variable aléatoire* U, *alors*

$$(X_1, X_2) \overset{\text{loi}}{=} (Y_1, Y_2) \overset{\text{loi}}{=} (X_1, Y_2) \overset{\text{loi}}{=} (Y_1, X_2)$$

car, quelles que soient les valeurs u *et* v,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X_1 = u, X_2 = v) &\underset{\textit{indép.}}{=} \mathbf{P}(X_1 = u)\,\mathbf{P}(X_2 = v) \\
&\underset{\textit{i.d.}}{=} \mathbf{P}(U = u)\,\mathbf{P}(U = v)
\end{aligned}$$

et ce calcul vaut pour les trois autres couples.

7.

7.a. Si X est une variable aléatoire bornée, alors c'est une variable aléatoire d'espérance finie.

● Vrai ❍ Faux

Théorème **[Ch.14 - 57]**

7.b. La réciproque est vraie.

❍ Vrai ● Faux

Une variable qui suit une loi géométrique ou une loi de Poisson n'est pas bornée puisque

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad \mathbf{P}(X = n) > 0$$

et pourtant c'est une variable aléatoire d'espérance finie **[Ch.14 - 43]**.

$\boxed{\textbf{7.c.}}$ Si la variable aléatoire X ne prend qu'un nombre fini de valeurs différentes, alors elle est d'espérance finie.

❍ Vrai ● Faux

Si X est une variable aléatoire qui prend un nombre fini de valeurs numériques *ou* vectorielles*, alors elle est bornée et donc d'espérance finie.*
Mais si X prend des valeurs qui ne sont pas numériques ? Un fabriquant de vêtements a besoin de savoir, avant *de produire, la répartition de la population de consommateurs en fonctions des tailles. Le modèle statistique fait alors apparaître une variable aléatoire T qui prend cinq valeurs : XS, S, M, L, XL et la notion de valeur moyenne n'a pas de sens pour T...*

Oui, c'était un piège ! Mais c'est pour votre bien...

8.

On considère ici une variable aléatoire X à valeurs dans une partie finie ou dénombrable E de $\mathbb{R}$ et une fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

définie sur E (au moins).

$\boxed{\textbf{8.a.}}$ Pour démontrer que $Y = f(X)$ est une variable aléatoire d'espérance finie, il faut calculer la loi de $f(X)$.

❍ Vrai ● Faux

C'est même franchement déconseillé ! Il est beaucoup plus sage d'appliquer la Formule de transfert **[Ch.14 - 49]**.

$\boxed{\textbf{8.b.}}$ Si X est une variable aléatoire bornée, alors $f(X)$ est une variable aléatoire d'espérance finie, quelle que soit la fonction f.

❍ Vrai ● Faux

Si X est une variable aléatoire bornée *à valeurs* entières*, alors elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs.*
❧ *Par conséquent, $f(X)$ est une variable aléatoire à valeurs réelles (ok ?) qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs et donc d'espérance finie.*
❧ *En revanche, si X est bornée mais pas à valeurs entières, il se peut que $f(X)$ ne soit pas bornée et même qu'elle ne soit pas d'espérance finie...*

Une fois encore, la réponse Faux *n'est pas tout à fait correcte, mais la prudence indique que c'est la meilleure réponse possible ici.*

❧ Contre-exemple : *Soit* G*, une variable aléatoire qui suit la loi* $\mathcal{G}(1/2)$*. Comme*

$$[G \geqslant 1] = \Omega,$$

la variable aléatoire X *définie par*

$$X = \frac{1}{G}$$

est bornée :

$$[0 < X \leqslant 1] = [G \geqslant 1] = \Omega.$$

L'ensemble des valeurs prises par X *est évidemment*

$$E = \left\{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

Considérons alors la fonction f *définie sur* $\mathbb{R}_+^*$ *par*

$$\forall\, x > 0, \quad f(x) = 3^{1/x}.$$

Pour tout $x \in E$*, il existe un entier* $n \geqslant 1$ *tel que* $x = 1/n$ *et*

$$f(x) \cdot \mathbf{P}(X = x) = 3^n \cdot \frac{1}{2^n} = (3/2)^n.$$

Comme la série géométrique $\sum (3/2)^n$ *est divergente, la famille*

$$\big(f(x) \cdot \mathbf{P}(X = x)\big)_{x \in E}$$

n'est pas sommable et la variable $f(X)$ *n'est donc pas une variable aléatoire d'espérance finie.*

8.c. On admet que $f(X)$ est une variable aléatoire d'espérance finie. Pour calculer l'espérance de $f(X)$, il faut calculer la loi de $f(X)$.

❍ Vrai ● Faux

Même commentaire qu'au **2.a***.*

9.

On veut choisir un nombre entier au hasard dans $\mathbb{N}$. Par quelle loi de probabilité est-il naturel de modéliser cette expérience aléatoire ?

❏ La loi uniforme sur $\mathbb{N}$

❏ Une loi géométrique

❏ Une loi de Poisson

Les lois géométriques et les lois de Poisson répondent à des besoins précis : durée d'attente avant un premier succès pour les lois géométriques **[Ch.15 - 67]** *et loi des événements rares pour les lois de Poisson* **[Ch.15 - 65.2]***.*
Elles sont donc utiles pour construire des modèles d'expériences aléatoires, mais ne peuvent pas servir à représenter le "hasard" sous sa forme générale.
❧ *La loi uniforme sur* $\mathbb{N}$*... n'existe pas ! S'il existait un réel* a *tel que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(X = n) = a,$$

la relation fondamentale

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = n) = 1$$

serait impossible !
Il n'y a pas de bonne réponse à cette question.
C'était un piège – encore un.