Lois de probabilités - mai 2020

Les questions indexées par des numéros différents sont indépendantes.
Toutes les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé

$$(\Omega, \Theta, \mathbf{P}).$$

1.

On considère trois variables aléatoires X, Y et Z qui suivent toutes la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 1$.

1.a. On peut calculer la loi de XYZ.

❍ Vrai ❍ Faux

1.b. On peut calculer l'espérance de XYZ.

❍ Vrai ❍ Faux

1.c. On peut calculer l'espérance de $X + Y + Z$.

❍ Vrai ❍ Faux

1.d. On peut calculer la variance de $X + Y + Z$.

❍ Vrai ❍ Faux

2.

Soit X, une variable aléatoire qui suit la loi géométrique de paramètre $p = 1/2$.

2.a. L'espérance de X est égale à :

❏ $1/2$

❏ 1

❏ 2

❏ Une autre valeur

2.b. La variance de X est égale à :

❏ $1/4$

❏ $1/2$

❏ 2

❏ 4

❏ Une autre valeur

2.c. La valeur de $\mathbf{E}(X^2)$ est égale à :

❏ 2

❏ 4

❏ 6

❏ Une autre valeur

❏ Aucune idée, il faudrait poser le calcul !

2.d. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la variable aléatoire X^n est d'espérance finie.

❍ Vrai ❍ Faux

3.

Soient X et Y, deux variables aléatoires qui suivent la loi géométrique de paramètre $p = 1/2$.

3.a. Choisissez la bonne réponse.

❏ $\mathbf{E}(X) > \mathbf{E}(Y)$

❏ $\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(Y)$

❏ $\mathbf{E}(X) < \mathbf{E}(Y)$

❏ Ça dépend de la loi du couple.

❏ C'est absurde !

3.b. La probabilité $\mathbf{P}(X > Y)$ est strictement positive.

❏ Vrai

❏ Faux

❏ Ça dépend de la loi du couple.

3.c. L'inégalité

$$\mathbf{E}(XY) \leqslant \mathbf{E}(X^2)$$

est

❏ Vraie

❏ Fausse

❏ Ça dépend de la loi du couple !

❏ Aucune idée...

4.

Soient X et Y, deux variables aléatoires.
On suppose que X suit la loi géométrique de paramètre $p = 1/2$ et que Y suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 1/2$.

4.a. Choisissez la bonne réponse.

❏ $\mathbf{E}(X) > \mathbf{E}(Y)$

❏ $\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(Y)$

❏ $\mathbf{E}(X) < \mathbf{E}(Y)$

❏ Ça dépend.

4.b. La probabilité $\mathbf{P}(X > Y)$ est strictement positive.

❏ Vrai

❏ Faux

❏ Ça dépend de la loi du couple.

5.

Soient X, Y et Z, trois variables aléatoires indépendantes.
On suppose que X et Y suivent la loi géométrique de paramètre $p = 1/2$ et que Z suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 1/2$.

5.a. Je peux calculer la loi de $X + Y$.

❍ Vrai ❍ Faux

5.b. Je peux calculer la loi de $X + Z$.

❍ Vrai ❍ Faux

5.c. Les couples (X, X) et (X, Y) suivent la même loi.

❍ Vrai ❍ Faux

5.d. Les couples (X, Y) et (X, Z) suivent la même loi.

❍ Vrai ❍ Faux

5.e. Choisissez la bonne réponse.

❏ $\mathbf{E}(XZ) < 1$

❏ $\mathbf{E}(XZ) = 1$

❏ $\mathbf{E}(XZ) > 1$

❏ L'espérance de XZ n'est pas définie.

6.

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes la loi de Bernoulli de paramètre $p = 1/2$ (modèle du jeu de Pile ou Face).

6.a.

$$(X_1, X_1) \overset{\text{loi}}{=} (X_1, X_2)$$

❍ Vrai ❍ Faux

6.b.

$$(X_1, X_2) \overset{\text{loi}}{=} (X_1, 1 - X_2)$$

❍ Vrai ❍ Faux

6.c.

$$(X_1, X_2) \overset{\text{loi}}{=} (X_2, X_3)$$

❍ Vrai ❍ Faux

$\boxed{\textbf{6.d.}}$ Les vecteurs aléatoires (X_1, X_2) et (X_2, X_3) sont indépendants.

❍ Vrai ❍ Faux

$\boxed{\textbf{6.e.}}$

$$(X_1, X_2) \overset{\text{loi}}{=} (X_3, X_4)$$

❍ Vrai ❍ Faux

$\boxed{\textbf{6.f.}}$ Les vecteurs aléatoires (X_1, X_2) et (X_3, X_4) sont indépendants.

❍ Vrai ❍ Faux

$\boxed{\textbf{6.g.}}$

$$X_1^2 \overset{\text{loi}}{=} X_2X_3$$

❍ Vrai ❍ Faux

$\boxed{\textbf{6.h.}}$ Les variables aléatoires X_1^2 et X_2X_3 sont indépendantes.

❍ Vrai ❍ Faux

$\boxed{\textbf{6.i.}}$ Les variables aléatoires X_1X_2 et X_2X_3 sont indépendantes.

❍ Vrai ❍ Faux