# MPSI 2 – Semaine 25

**A.** On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -5 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

**A - 1.** Calculer $B = A - I_3$, $B^2$ et $B^3$. En déduire un polynôme annulateur de $A$.

**A - 2.a.** Vérifier que les matrices $I_3$, $B$ et $B^2$ sont linéairement indépendantes en tant que vecteurs de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

**A - 2.b.** La famille

$$(I_3, B, B^2, B^3)$$

est-elle libre ?

**A - 3.a.** Vérifier que la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible.

***NB :** pour la suite de l'exercice, il n'est pas nécessaire de calculer l'inverse de $P$ (mais ce n'est pas interdit non plus).*

**A - 3.b.** On considère les vecteurs

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad C_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Démontrer que la famille

$$(C_1, C_2, C_3)$$

est une base de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

**A - 3.c.** En calculant $AC_1$, $AC_2$ et $AC_3$, démontrer que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**A - 4.** Calculer $A^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

⋆

**B.** On considère une matrice $A \in \mathfrak{M}_d(\mathbb{R})$ et on suppose que cette matrice vérifie la relation suivante.

$$A^2 = A + 6I_d \tag{R}$$

**B - 1.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un couple

$$(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$$

tel que

$$A^n = a_n \cdot A + b_n \cdot I_d.$$

Ce couple $(a_n, b_n)$ est-il unique ?

**B - 2.** Donner un polynôme annulateur $P_0$ de $A$ tel que

$$\deg P_0 = 2$$

et factoriser ce polynôme.

**B - 3.** Démontrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $Q_n$ et un couple $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$X^n = (X-3)(X+2)Q_n + (a_nX + b_n). \tag{E}$$

Ce couple $(a_n, b_n)$ est-il unique ?

**B - 4.** On pose

$$P = \frac{2}{5} I_d + \frac{1}{5} A \quad \text{et} \quad Q = \frac{3}{5} I_d - \frac{1}{5} A.$$

**B - 4.a.** Vérifier que

$$P + Q = I_d$$

et que

$$3P - 2Q = A.$$

**B - 4.b.** Démontrer que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad A^n = 3^n \cdot P + (-2)^n \cdot Q.$$

**B - 4.c.** Vérifier que $P$ et $Q$ sont des matrices de projection et que

$$PQ = QP = 0_d.$$

$\star$

**C.** Les deux questions sont indépendantes.

**C - 1.** Soit $A \in \mathfrak{M}_d(\mathbb{R})$. On suppose que

$$A^3 = -2I_d. \tag{R$_1$}$$

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un couple

$$(q, r) \in \mathbb{N}^2$$

tel que

$$A^n = (-2)^q \cdot A^r \quad \text{avec} \quad 0 \leqslant r \leqslant 2.$$

**C - 2.** On considère maintenant une matrice $A \in \mathfrak{M}_d(\mathbb{R})$ telle que

$$A^4 = 3A. \tag{R$_2$}$$

**C - 2.a.** Exprimer $A^{n+3}$ en fonction de $A^n$.

**C - 2.b.** Pour quels entiers $n \in \mathbb{N}$ existe-t-il un couple

$$(q, r) \in \mathbb{N}^2$$

tels que

$$n = 3q + r \quad \text{avec} \quad 1 \leqslant r \leqslant 3 \quad ?$$

Le couple $(q, r)$ est-il unique ?

**C - 2.c.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer $A^n$ en fonction de $I_d$, $A$, $A^2$ et $A^3$.

$\star$

**D.** On considère une matrice $A \in \mathfrak{M}_d(\mathbb{R})$ et on suppose que

$$A^3 - A^2 - 5A - 3I_d = 0_d. \tag{R}$$

**D - 1.** Démontrer que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad A^n \in \operatorname{Vect}(I_d, A, A^2).$$

**D - 2.** On pose

$$P_0 = (X+1)^2(X-3).$$

Vérifier que $P_0$ est un polynôme annulateur de $A$.

**D - 3.** Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $Q_n$ et un triplet

$$(a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{R}^3$$

tels que

$$X^n = P_0 \times Q_n + (a_n X^2 + b_n X + c_n). \tag{D}$$

**D - 4.** Donner trois équations satisfaites par les réels $a_n$, $b_n$ et $c_n$.
*On pourra dériver la relation (D).*

**D - 5.** On *admet* qu'on peut déduire de ces trois équations les expression suivantes.

$$a_n = \frac{3^n + (4n-1)(-1)^n}{16}$$
$$b_n = \frac{2.3^n - (8n+2)(-1)^n}{16}$$
$$c_n = \frac{3^n - (4n+1)(-1)^n}{16}$$

En déduire trois matrices $P$, $Q$ et $Q_1$ telles que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad A^n = 3^n \cdot P + (-1)^n \cdot Q + n(-1)^n Q_1.$$

On exprimera $P$, $Q$ et $Q_1$ en fonction de $I_d$, $A$ et $A^2$.

⋆

**E.** Soit $A \in \mathfrak{M}_d(\mathbb{R})$.
*Les deux questions sont indépendantes.*
**E - 1.** On considère la matrice écrite par blocs

$$M = \begin{pmatrix} A & I_d \\ 0_d & A \end{pmatrix}.$$

**E - 1.a.** Calculer $M^2$ et $M^3$.
**E - 1.b.** Calculer $M^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
*On pourra procéder par récurrence.*
**E - 1.c.** On considère un polynôme

$$P = \sum_{k=0}^{n} c_k X^k$$

et on suppose que $P$ est un polynôme annulateur de $A$.
Calculer la matrice $P(M)$ et vérifier que

$$[P(M)]^2 = 0_{2d}.$$

**E - 2.** On considère la matrice écrite par blocs

$$M = \begin{pmatrix} A & A \\ 0_d & A \end{pmatrix}.$$

Calculer $M^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.