MPSI 2 – Semaine 25

A. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -5 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

A - 1. Calculer $B = A - I_3$, B^2 et B^3. En déduire un polynôme annulateur de A.

Tout d'abord

$$B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -5 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et enfin que $B^3 = 0_3$.

REMARQUE.— *Il doit être clair que*

$$\operatorname{rg} B = 2, \quad \operatorname{rg} B^2 = 1 \quad \text{et} \quad \operatorname{rg} B^3 = 0.$$

❧ *Comme* $(A - I_3)^3 = 0_3$, *le polynôme* $(X-1)^3$ *est un polynôme annulateur de* A.

A - 2.a. Vérifier que les matrices I_3, B et B^2 sont linéairement indépendantes en tant que vecteurs de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

Considérons trois réels a_0, a_1 *et* a_2 *tels que*

$$a_0 I_3 + a_1 B + a_2 B^2 = 0_3.$$

Appliquons cette matrice au vecteur E_1 *de la base canonique : on sait que cela revient à extraire les premières colonnes des différentes matrices.*

$$a_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_1 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En considérant les deux dernières lignes, on voit que a_1 *et* a_2 *sont nécessairement nuls. On en déduit que* a_0 *doit être nul lui aussi, ce qui prouve que la famille*

$$(I_3, B, B^2)$$

est bien une famille libre.

A - 2.b. La famille

$$(I_3, B, B^2, B^3)$$

est-elle libre ?

Une famille qui contient le vecteur nul (c'est-à-dire la matrice B^3*) est forcément liée !*

A - 3.a. Vérifier que la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible.

NB : *pour la suite de l'exercice, il n'est pas nécessaire de calculer l'inverse de* P *(mais ce n'est pas interdit non plus).*

Puisqu'il n'est pas nécessaire de calculer P^{-1}, *nous allons démontrer que* P *est inversible en calculant son rang (c'est la méthode la plus efficace).*

$$P \underset{C_2 \leftarrow C_2 + C_3}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour la matrice de droite, les deux premières colonnes ne sont pas proportionnelles et donc linéairement indépendantes. La troisième colonne n'est pas une combinaison linéaire des deux premières (à cause du coefficient de la première ligne), donc les trois colonnes sont linéairement indépendantes.
Comme les opérations de pivot conservent le rang, on en déduit que $\operatorname{rg} P = 3$ *et donc que la matrice* P *est inversible.*
REMARQUE.— *Pour information uniquement,*

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

A - 3.b. On considère les vecteurs

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad C_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Démontrer que la famille

$$(C_1, C_2, C_3)$$

est une base de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
Les vecteurs C_1, C_2, C_3 *sont les colonnes de la matrice* P. *Comme la matrice* P *est inversible, ces trois vecteurs forment une base de* $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

A - 3.c. En calculant AC_1, AC_2 et AC_3, démontrer que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par produit matriciel, on trouve

$$AC_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad AC_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad AC_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

❧ *Notons* u, *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$ *représenté par la matrice* A *dans la base canonique.*
La matrice inversible P *peut être interprétée comme la matrice de passage de la base canonique à une autre base*

$$\mathscr{B} = (c_1, c_2, c_3)$$

de $\mathbb{R}^3$. *Dans ce contexte, la matrice de* u *relative à cette base* $\mathscr{B}$ *est donnée par*

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = P^{-1}AP$$

(Formule du changement de base pour les endomorphismes).
D'après les colonnes AC_1, AC_2 *et* AC_3 *qui représentent les trois vecteurs* $u(c_1)$, $u(c_2)$ *et* $u(c_3)$ *dans la base canonique,*

$$\begin{cases} u(c_1) = c_1 & = 1 \cdot c_1 + 0 \cdot c_2 + 0 \cdot c_3, \\ u(c_2) = c_1 + c_2 & = 1 \cdot c_1 + 1 \cdot c_2 + 0 \cdot c_3, \\ u(c_3) = c_2 + c_3 & = 0 \cdot c_1 \quad 1 \cdot c_2 + 1 \cdot c_3 \end{cases}$$

ce qui montre bien que

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}\big(u(c_1), u(c_2), u(c_3)\big) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A - 4. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Avec les calculs précédents, on dispose de deux méthodes simples pour calculer les puissances de A.

▶ ***Avec un polynôme annulateur***

La formule de Taylor pour les polynômes nous donne l'expression d'un polynôme quelconque dans la base $\big((X-1)^k\big)_{k\in\mathbb{N}}$.

$$Q = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{Q^{(k)}(1)}{k!} \cdot (X-1)^k$$

REMARQUE.— *On rappelle qu'il n'y a qu'un nombre* fini *de termes non nuls dans cette écriture !*

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X^n = 1 + n(X-1) + \frac{n(n-1)}{2}(X-1)^2 + (X-1)^3 \cdot \Big[\underbrace{\cdots}_{\text{un polynôme}} \Big].$$

En substituant A à l'indéterminée X, on en déduit que

$$\begin{aligned} A^n = I_3 + n(A-I_3) + \frac{n(n-1)}{2}(A-I_3)^2 \\ + \underbrace{(A-I_3)^3}_{=0_3} \times \underbrace{(\cdots)}_{\text{une matrice}} \end{aligned} \tag{1}$$

et donc que

$$A^n = \frac{(n-1)(n-2)}{2} I_3 - n(n-2)A + \frac{n(n-1)}{2}A^2 \tag{2}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

REMARQUE.— *Pour $0 \leqslant n \leqslant 2$, on prendra le temps de reconnaître les polynômes interpolateurs de Lagrange associés aux abscisses 0, 1 et 2.*

▶ ***Avec la formule du binôme***

On a établi plus haut que

$$P^{-1}AP = I_3 + N \quad \textit{avec} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme les matrices I_3 et N commutent (de manière évidente !), que

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \textit{et que} \quad N^3 = 0_3,$$

on déduit de la formule du binôme que

$$(P^{-1}AP)^n = I_3 + \binom{n}{1}N + \binom{n}{2}N^2.$$

On sait bien (ou on démontre par récurrence) que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad (P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP$$

et on en déduit que

$$\begin{aligned} A^n &= PI_3P^{-1} + nPNP^{-1} + \frac{n(n-1)}{2}PN^2P^{-1} \\ &= I_3 + nPNP^{-1} + \frac{n(n-1)}{2}(PNP^{-1})^2. \end{aligned} \tag{3}$$

Mais la relation $P^{-1}AP = I_3 + N$ nous donne aussi

$$A = PI_3P^{-1} + PNP^{-1} = I_3 + PNP^{-1}$$

et donc

$$PNP^{-1} = A - I_3 = B.$$

La formule (3) est donc exactement la formule (2) et on peut en déduire l'expression simplifiée (1) de A^n comme plus haut.

⋆

B. On considère une matrice $A \in \mathfrak{M}_d(\mathbb{R})$ et on suppose que cette matrice vérifie la relation suivante.

$$A^2 = A + 6I_d \tag{R}$$

B - 1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un couple

$$(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$$

tel que

$$A^n = a_n \cdot A + b_n \cdot I_d.$$

Ce couple (a_n, b_n) est-il unique ?

Pour $n = 0$, il existe une décomposition évidente :

$$A^0 = I_d = 0 \cdot A + 1 \cdot I_d.$$

Si, pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$, il existe une décomposition

$$A^n = a_n \cdot A + b_n \cdot I_d$$

alors

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= a_n \cdot A^2 + b_n \cdot A = a_n \cdot (A + 6I_d) + b_n \cdot A \\ &= (a_n + b_n) \cdot A + 6a_n \cdot I_d \end{aligned}$$

ce qui nous donne une *décomposition de A^{n+1}.*
On a ainsi prouvé par récurrence l'existence d'une décomposition pour chaque puissance de A.
❧ *Cette décomposition est unique si, et seulement si, le couple (A, I_d) est une famille libre, c'est-à-dire si A n'est pas une homothétie.*
La relation (R) nous dit que l'égalité $A = \lambda I_d$ est possible pour

$$\lambda^2 - \lambda + 6 = 0$$

c'est-à-dire pour $\lambda = -2$ et pour $\lambda = 3$.
Il est donc possible *que la décomposition trouvée pour A^n ne soit pas unique. Mais dans ce cas la matrice A est tellement simple (homothétie) que le calcul des puissances de A n'est plus un problème !*

B - 2. Donner un polynôme annulateur P_0 de A tel que

$$\deg P_0 = 2$$

et factoriser ce polynôme.

La relation (R) nous dit que le polynôme

$$P_0 = X^2 - X + 6 = (X-3)(X+2)$$

est un polynôme annulateur de A.
NB : Interdit *de perdre du temps ou de se tromper pour factoriser un polynôme de degré 2 !*

B - 3. Démontrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme Q_n et un couple $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$X^n = (X-3)(X+2)Q_n + (a_n X + b_n). \tag{E}$$

Ce couple (a_n, b_n) est-il unique ?

Soit $n \in \mathbb{N}$, fixé.
Le Théorème sur la division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$ nous assure qu'il existe un unique couple (Q_n, R_n) de polynômes tels que

$$X^n = P_0 \times Q_n + R_n \quad \textit{avec} \quad \deg R_n < \deg P_0 = 2.$$

De plus, la décomposition de R_n dans la base canonique $(1, X)$ de $\mathbb{R}_1[X]$ est unique.

Il existe donc un unique triplet

$$(Q_n, a_n, b_n) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

tel que

$$X^n = (X-3)(X+2)Q_n + (a_n X + b_n).$$

B - 4. On pose

$$P = \frac{2}{5} I_d + \frac{1}{5} A \quad \text{et} \quad Q = \frac{3}{5} I_d - \frac{1}{5} A.$$

B - 4.a. Vérifier que

$$P + Q = I_d$$

et que

$$3P - 2Q = A.$$

Vérifications immédiates !

B - 4.b. Démontrer que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad A^n = 3^n \cdot P + (-2)^n \cdot Q.$$

Au moins deux méthodes possibles !

❧ ***Par récurrence***

D'après la relation (R),

$$AP = \frac{A^2 + 2A}{5} = \frac{3A + 6I_d}{5} = 3P$$

$$AQ = \frac{3A - A^2}{5} = \frac{2A - 6I_d}{5} = -2Q.$$

La relation à établir a déjà été vérifiée pour $n = 0$ *et* $n = 1$*, c'est plus qu'il n'en faut pour initialiser la récurrence.*

S'il existe un entier $n \geqslant 1$ *tel que*

$$A^n = 3^n \cdot P + (-2)^n \cdot Q,$$

alors

$$\begin{aligned} A^{n+1} = A \cdot A^n &\overset{HR}{=} 3^n \cdot AP + (-2)^n \cdot AQ \\ &= 3^{n+1} \cdot P + (-2)^{n+1} \cdot Q \end{aligned}$$

ce qui prouve que la propriété est héréditaire et achève la démonstration par récurrence.

❧ ***En exploitant la division euclidienne***

En substituant les racines de P_0 *à* X *dans la relation* (E)*, on obtient un système de deux équations en les deux inconnues* a_n *et* b_n*.*

$$\begin{cases} (-2)^n = -2a_n + b_n \\ 3^n = 3a_n + b_n \end{cases}$$

En résolvant ce système, on obtient

$$a_n = \frac{3^n - (-2)^n}{5} \quad \textit{et} \quad b_n = \frac{2.3^n + 3.(-2)^n}{5}.$$

Comme $P_0(A) = 0_d$*, on déduit de* (E) *que*

$$A^n = [0_d \times Q_n(A)] + a_n A + b_n I_d = a_n A + b_n I_d$$

et donc enfin (après réorganisation des termes)

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad A^n = 3^n P + (-2)^n Q.$$

B - 4.c. Vérifier que P et Q sont des matrices de projection et que

$$PQ = QP = 0_d.$$

On vérifie que $P^2 = P$, que $Q^2 = Q$ et que $PQ = QP = 0_d$ en développant ces produits et en simplifiant le résultat à l'aide de la relation (R).

⋆

C. Les deux questions sont indépendantes.
C - 1. Soit $A \in \mathfrak{M}_d(\mathbb{R})$. On suppose que

$$A^3 = -2I_d. \tag{R_1}$$

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un couple

$$(q, r) \in \mathbb{N}^2$$

tel que

$$A^n = (-2)^q \cdot A^r \quad \text{avec} \quad 0 \leqslant r \leqslant 2.$$

Effectuons la division euclidienne de n par 3 : il existe un quotient q et un reste r tels que

$$n = 3q + r \quad \textit{avec} \quad 0 \leqslant r < 3.$$

On en déduit alors de (R_1) que

$$A^n = A^{3q}.A^r = (A^3)^q.A^r = (-2I_d)^q.A^r = (-2)^q \cdot A^r.$$

C - 2. On considère maintenant une matrice $A \in \mathfrak{M}_d(\mathbb{R})$ telle que

$$A^4 = 3A. \tag{R_2}$$

C - 2.a. Exprimer A^{n+3} en fonction de A^n.
Avec un peu d'astuce,

$$A^{n+3} = A^{n-1}.A^4 \overset{(R_2)}{=} A^{n-1}.(3A) = 3 \cdot A^n.$$

❧ *Attention ! La matrice A n'est pas nécessairement inversible, donc l'expression A^{n-1} n'a de sens que si $n - 1 \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire si $n \in \mathbb{N}^*$.*
❧ *Cela dit, si A est inversible, alors la relation (R_2) entraîne (en multipliant les deux membres par A^{-1}) que $A^3 = 3I_d = 3 \cdot A^0$.*

C - 2.b. Pour quels entiers $n \in \mathbb{N}$ existe-t-il un couple

$$(q, r) \in \mathbb{N}^2$$

tels que

$$n = 3q + r \quad \text{avec} \quad 1 \leqslant r \leqslant 3 \quad ?$$

Le couple (q, r) est-il unique ?
Ça ressemble à la division euclidienne de n par 3, mais ce n'est pas la division euclidienne (à cause de la contrainte sur le reste).
❧ *Notons tout d'abord que*

$$n \geqslant 3 \times 0 + 1$$

puisque $q \in \mathbb{N}$ et $r \geqslant 1$.
❧ *Pour $r = 1$ et $r = 2$, on a bien $0 \leqslant r < 3$ et il s'agit alors bien de l'authentique division euclidienne de n par 3 : l'existence et l'unicité du couple (q, r) est assurée par le Théorème vu en cours.*
❧ *Pour $r = 3$, si une telle décomposition existait, l'entier n s'écrirait alors*

$$n = 3q + 3 = 3(q + 1) = 3(q + 1) + 0$$

cette dernière expression nous donnant la division euclidienne de n *par 3. Cette remarque nous donne la seule valeur possible pour* q.
❧ *Réciproquement, si* $n \in \mathbb{N}^*$ *est un multiple* non nul *de 3, alors la division euclidienne de* n *par 3 nous donne*

$$n = 3q_0 + 0 \quad \textit{avec} \quad q_0 \geqslant 1$$

(puisque $n > 0$*) et donc*

$$n = 3\underbrace{(q_0 - 1)}_{\in \mathbb{N}} + 3$$

ce qui nous prouve qu'il existe une décomposition de n *du type voulu.*
❧ *En conclusion, il existe un, et un seul, couple* $(q, r) \in \mathbb{N}^2$ *tel que*

$$n = 3q + r \quad \textit{avec} \quad 1 \leqslant r \leqslant 3$$

si, et seulement si, $n \in \mathbb{N}^*$.

C - 2.c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer A^n en fonction de I_d, A, A^2 et A^3.
❧ *Pour* $n = 0$*, on a* $A^0 = I_d$.
REMARQUE.— *Ce cas particulier est très simple, ce n'est pas une raison pour le négliger !*
❧ *Pour* $n \geqslant 1$*, on sait qu'il existe un couple* $(q, r) \in \mathbb{N}^2$ *tel que*

$$n = 3q + r \quad \textit{avec} \quad 1 \leqslant r \leqslant 3.$$

❧ *Si* $q \geqslant 1$*, alors*

$$3\underbrace{(q - 1)}_{\in \mathbb{N}} + \underbrace{(r - 1)}_{\in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}$$

et

$$\begin{aligned} A^{3q+r} &= A^{3(q-1)+(r-1)+4} = A^{3(q-1)+(r-1)}.(3A) \qquad \text{(par } (R_2)) \\ &= 3^1.A^{3(q-1)+r}. \end{aligned}$$

On peut alors en déduire par récurrence sur $q \in \mathbb{N}$ *que*

$$\forall\, q \in \mathbb{N},\ \forall\, r \in \{1, 2, 3\}, \quad A^{3q+r} = 3^q.A^r$$

Initialisation — *Pour* $r \in \{1, 2, 3\}$ *et* $q = 0$*, la propriété est évidente puisque* $3q = 0$ *et* $3^q = 1$.
Hérédité — *On suppose qu'il existe* $q \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$\forall\, r \in \{1, 2, 3\}, \quad A^{3q+r} = 3^q.A^r.$$

On est prié de faire attention aux quantificateurs en formulant l'hypothèse de récurrence.
Multiplions de part et d'autre par A^3. *On obtient alors à gauche*

$$A^{3q+r}.A^3 = A^{3q+r+3} = A^{3(q+1)+r}$$

et à droite

$$\begin{aligned} 3^q.A^r.A^3 &= 3^q.A^{r+3} = 3^q.A^{(r-1)+4} \\ &= 3^q.A^{r-1}.A^4 \qquad \text{(car } r - 1 \in \mathbb{N}) \\ &= 3^q.A^{r-1}.(3A) \qquad \text{(par } (R_2)) \\ &= 3^{q+1}.A^{(r-1)+1} \\ &= 3^{q+1}.A^r \end{aligned}$$

On a donc établi que

$$\forall\, r \in \{1, 2, 3\}, \quad A^{3(q+1)+r} = 3^{q+1}.A^r$$

et la démonstration par récurrence est achevée.
❧ *En conclusion, pour tout* $n \geqslant 1$*, il existe un unique couple*

$$(q, r) \in \mathbb{N}^2$$

avec
$$n = 3q + r, \qquad 1 \leqslant r \leqslant 3 \quad \textit{et} \quad A^n = 3^q.A^r.$$
Sans oublier le cas exceptionnel
$$A^0 = I_d$$
qui, pour une fois, ne peut être confondu avec le cas général.

⋆

D. On considère une matrice $A \in \mathfrak{M}_d(\mathbb{R})$ et on suppose que
$$A^3 - A^2 - 5A - 3I_d = 0_d. \tag{R}$$

D - 1. Démontrer que
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad A^n \in \text{Vect}(I_d, A, A^2).$$

On peut procéder par récurrence.
Initialisation *— Pour $n \in \{0, 1, 2\}$, il est évident que*
$$A^n \in \text{Vect}(I_d, A, A^2).$$
Hérédité *— S'il existe un entier $n \geqslant 2$ tel que*
$$A^n \in \text{Vect}(I_d, A, A^2),$$
alors (par définition du sous-espace engendré) il existe trois scalaires $a_{n,0}$, $a_{n,1}$ et $a_{n,2}$ tels que
$$A^n = a_{n,0}I_d + a_{n,1}A + a_{n,2}A^2.$$
Multiplions par A :
$$\begin{aligned} A^{n+1} &= a_{n,0}A + a_{n,1}A^2 + a_{n,2}A^3 \\ &= a_{n,0}A + a_{n,1}A^2 + a_{n,2}(A^2 + 5A + 3I_d) \qquad \text{(par (R))} \\ &= 3a_{n,2}I_d + (a_{n,0} + 5a_{n,2})A + (a_{n,1} + a_{n,2})A^2 \\ &\in \text{Vect}(I_d, A, A^2) \end{aligned}$$
et la démonstration par récurrence est terminée.

D - 2. On pose
$$P_0 = (X+1)^2(X-3).$$
Vérifier que P_0 est un polynôme annulateur de A.
En développant, on constate que
$$P_0 = X^3 - X^2 - 5X - 3$$
et la relation (R) nous dit alors précisément que P_0 est un polynôme annulateur de A.

D - 3. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme Q_n et un triplet
$$(a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{R}^3$$
tels que
$$X^n = P_0 \times Q_n + (a_nX^2 + b_nX + c_n). \tag{D}$$

On pose la division euclidienne de X^n par P_0 (qui n'est pas le polynôme nul) : il existe un unique couple (Q_n, R_n) de polynômes à coefficients réels tels que
$$X^n = P_0 \times Q_n + R_n \quad \textit{et} \quad \deg R_n < \deg P_0.$$
En particulier, $\deg R_n \leqslant 2$ et donc R_n est une combinaison linéaire de 1, X et X^2.

D - 4. Donner trois équations satisfaites par les réels a_n, b_n et c_n.
On pourra dériver la relation (D)*.*
En substituant -1 *et* 3 *à* X *dans la relation* (D)*, on obtient deux équations :*

$$\begin{aligned}(-1)^n &= P_0(-1).Q_n(-1) + a_n(-1)^2 + b_n(-1) + c_n\\ &= a_n - b_n + c_n && (\text{car } P_0(-1) = 0)\\ 3^n &= P_0(3).Q_n(3) + a_n(3)^2 + b_n(3) + c_n\\ &= 9a_n + 3b_n + c_n && (\text{car } P_0(3) = 0)\end{aligned}$$

En dérivant la relation (D)*, on obtient*

$$nX^{n-1} = P_0' \times Q_n + P_0 \times Q_n' + (2anX + b_n). \qquad (D')$$

Comme -1 *est une racine* double *de* P_0*, on a*

$$P_0(-1) = P_0'(-1) = 0$$

et donc, en substituant (-1) *à* X *dans la relation* (D′)*,*

$$n(-1)^{n-1} = -2a_n + b_n.$$

REMARQUE.— *La méthode repose sur un choix intelligent des valeurs substituées à l'indéterminée* X*, choix qui rend inutile le calcul du quotient* Q_n *!*

REMARQUE.— *On peut vérifier que le système de trois équations en* a_n*,* b_n*,* c_n *est bien un système de Cramer.*
Ce n'est pas une particularité du polynôme P_0 *étudié dans cet exercice, c'est une propriété générale (pas toute simple à démontrer).*

REMARQUE.— *Il faut impérativement savoir résoudre un tel système, c'est une technique élémentaire ! Le calcul est plus périlleux que long ou difficile (à cause des fractions), c'est pour cette seule raison que je donne le résultat dans l'énoncé.*

D - 5. On *admet* qu'on peut déduire de ces trois équations les expression suivantes.

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{3^n + (4n-1)(-1)^n}{16}\\ b_n &= \frac{2.3^n - (8n+2)(-1)^n}{16}\\ c_n &= \frac{3^n - (4n+1)(-1)^n}{16}\end{aligned}$$

En déduire trois matrices P, Q et Q_1 telles que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad A^n = 3^n \cdot P + (-1)^n \cdot Q + n(-1)^n Q_1.$$

On exprimera P, Q et Q_1 en fonction de I_d, A et A^2.
Comme P_0 *est un polynôme annulateur de* A*, on déduit de la relation (D) que*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad A^n = a_n A^2 + b_n A + c_n I_d.$$

Avec les valeurs de a_n*,* b_n*,* c_n *données par l'énoncé, on trouve*

$$A^n = 3^n \cdot P + (-1)^n \cdot Q + n(-1)^n \cdot Q_1$$

avec

$$\begin{aligned}P &= \frac{A^2 + 2A + I_d}{16},\\ Q &= \frac{-A^2 - 2A + 15I_d}{16},\\ Q_1 &= \frac{A^2 - 2A - 3I_d}{4}.\end{aligned}$$

REMARQUE.— *On peut factoriser ces expressions.*

$$P = \frac{1}{16}(A + I_d)^2$$
$$Q = \frac{-1}{16}(A + 5I_d)(A - 3I_d)$$
$$Q_1 = \frac{1}{4}(A - 3I_d)(A + I_d)$$

Comme tous les facteurs commutent (ce sont des polynômes en A), on déduit de l'expression factorisée de P_0, polynôme annulateur de A, que

$$PQ = QP = PQ_1 = Q_1P = QQ_1 = Q_1Q = 0_d.$$

On peut aussi remarquer que

$$P + Q = 0_d$$

et déduire des relations précédentes que les matrices P et Q sont des matrices de projection.

⋆

E. Soit $A \in \mathfrak{M}_d(\mathbb{R})$.
Les deux questions sont indépendantes.
E - 1. On considère la matrice écrite par blocs

$$M = \begin{pmatrix} A & I_d \\ 0_d & A \end{pmatrix}.$$

E - 1.a. Calculer M^2 et M^3.
D'après les règles du calcul par blocs,

$$M^2 = \begin{pmatrix} A^2 & 2A \\ 0_d & A^2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M^3 = \begin{pmatrix} A^3 & 3A^2 \\ 0_d & A^3 \end{pmatrix}.$$

E - 1.b. Calculer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
On pourra procéder par récurrence.
Les expressions de M, M^2 et M^3 suggèrent de poser

$$M^n = \begin{pmatrix} A^n & n.A^{n-1} \\ 0_d & A^n \end{pmatrix}.$$

Si cette expression est correcte pour un entier $n \geqslant 1$, alors

$$\begin{aligned} M^{n+1} = M^n.M &= \begin{pmatrix} A^n & n.A^{n-1} \\ 0_d & A^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & I_d \\ 0_d & A \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A^{n+1} & (n+1).A^n \\ 0_d & A^{n+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ce qui prouve que l'expression est encore correcte pour $n + 1$.
Comme elle est vraie pour $n = 1$ (et aussi $n = 2$, $n = 3$...), on déduit du principe de récurrence que

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad M^n = \begin{pmatrix} A^n & n.A^{n-1} \\ 0_d & A^n \end{pmatrix}.$$

E - 1.c. On considère un polynôme

$$P = \sum_{k=0}^{n} c_k X^k$$

et on suppose que P est un polynôme annulateur de A.
Calculer la matrice $P(M)$ et vérifier que

$$[P(M)]^2 = 0_{2d}.$$

Par définition,

$$P(M) = \sum_{k=0}^{n} c_k M^k.$$

On a trouvé une expression de M^k *valable pour tout* $k \geqslant 1$, *donc il faut traiter le terme constant séparément :*

$$\begin{aligned} P(M) &= c_0 \begin{pmatrix} I_d & 0_d \\ 0_d & I_d \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^{n} c_k \begin{pmatrix} A^k & k.A^{k-1} \\ 0_d & A^k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} c_k A^k & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k c_k A^{k-1} \\ 0_d & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} c_k A^k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P(A) & P'(A) \\ 0_d & P(A) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et donc, puisque P *est un polynôme annulateur de* A,

$$P(M) = \begin{pmatrix} 0_d & P'(A) \\ 0_d & 0_d \end{pmatrix}.$$

❧ *On déduit alors des règles du calcul matriciel par blocs que*

$$[P(M)]^2 = \begin{pmatrix} 0_d & 0_d \\ 0_d & 0_d \end{pmatrix} = 0_{2d}.$$

E - 2. On considère la matrice écrite par blocs

$$M = \begin{pmatrix} A & A \\ 0_d & A \end{pmatrix}.$$

Calculer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

On procède de la même manière : on calcule M^2, M^3, *éventuellement* M^4 *pour conjecturer que*

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad M^n = \begin{pmatrix} A^n & nA^n \\ 0_d & A^n \end{pmatrix}$$

et démontrer ensuite cette propriété par récurrence.

REMARQUE.— *Pour formuler la conjecture et la conclusion de la démonstration par récurrence, il est nécessaire de quantifier avec* Pour tout $n \geqslant 1$.

En revanche, l'hypothèse de récurrence doit être quantifiée par Il existe $n \geqslant 1$. *On suppose en effet que la propriété est vraie* pour un certain entier n *dans le but de prouver qu'elle est alors vraie aussi pour l'entier suivant.*

(Si on suppose *que la propriété est vraie* pour tout entier $n \geqslant 1$, *il n'y a plus rien à démontrer !)*

REMARQUE.— *La propriété est vraie pour* $n = 0$ *puisque*

$$M^0 = I_{2d} = \begin{pmatrix} I_d & 0_d \\ 0_d & I_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^0 & 0_d \\ 0_d & A^0 \end{pmatrix}.$$