Banque CCP [33]

▶ Un ensemble fini est fermé **[Ch.22 - 23.7]**, donc

$$U = \mathbb{R}^2 \setminus \{O\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

est *ouvert*.

▶ Sur l'ouvert U, la fonction f est le quotient d'une fonction polynomiale

$$[(x,y) \mapsto xy]$$

par une fonction qui ne s'annule pas, composée d'une fonction polynomiale par la fonction $\sqrt{\cdot}$.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ U & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2+y^2 & \longmapsto & \sqrt{x^2+y^2} \end{array}$$

Par conséquent **[Ch.20 - 64 & 66]**, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'ouvert U.

Du fait de la présence de la racine carrée, la fonction f n'est pas *une fonction rationnelle !*

1.

Pour démontrer que f *est continue sur* $\mathbb{R}^2$*, il reste donc* ***[Ch.22 - 52]*** *à démontrer qu'elle est continue au point* $O = (0,0)$.

Pour cela, il s'agit de comparer l'expression générale

$$g(x,y)$$

à la valeur particulière

$$g(0,0) = 0$$

en choisissant une norme sur $\mathbb{R}^2$ *pour étudier rigoureusement la limite.*

Le choix de cette norme est indifférent puisque $\mathbb{R}^2$ *est un espace de dimension finie. Nous choisirons la norme euclidienne canonique car c'est celle qui rend les calculs les plus simples.*

Soit $(x,y) \in U$. Il existe donc

$$r = \|(x,y)\|_2 > 0$$

et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que

$$x = r\cos\theta \qquad \text{et} \qquad y = r\sin\theta.$$

On en déduit que

$$f(x,y) = r\cos\theta\sin\theta$$

et donc que

$$\left|f(x,y) - f(0,0)\right| \leqslant r.$$

Le majorant est indépendant de θ et tend vers 0 lorsque r tend vers 0, donc **[Ch.24 - 12.1]**

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0).$$

On a ainsi démontré que f était continue au point $O = (0,0)$ et donc qu'elle était continue sur $\mathbb{R}^2$ tout entier.

2.

On a démontré que f était de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur U, donc elle admet des dérivées partielles en chaque point de U.

❧ *Il est absolument inutile de calculer les dérivées partielles de f sur U pour le moment, ce n'est pas en les calculant qu'on prouve leur existence !*

Il est important de comprendre qu'en calculant les dérivées partielles sur U, on applique en fait les théorèmes qui démontrent que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur U.

Il vaut mieux, à mon sens, être conscient d'appliquer ces théorèmes et d'en déduire clairement que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur U que d'appliquer ces théorèmes sans s'en rendre compte...

❧ *Au point O, qui n'appartient pas à l'ouvert U, rien ne prouve pour le moment que f admet des dérivées partielles.*

Ici encore, l'expression générale (sur U) des dérivées partielles serait sans intérêt : ce qui est calculé sur U n'est valable que sur U.

Pour étudier l'existence des dérivées partielles au point O, on se place en ce point et on se déplace parallèlement aux axes de coordonnées.

❧ Pour $x \neq 0$, on forme le taux d'accroissement

$$\frac{f\big(O + (x, 0)\big) - f(O)}{x} = 0$$

qui tend évidemment vers 0 lorsque x tend vers 0.

❧ De même, pour $y \neq 0$, on forme le taux d'accroissement

$$\frac{f\big(O + (0, y)\big) - f(O)}{y} = 0$$

qui tend lui aussi vers 0 lorsque y tend vers 0.

On en déduit que les dérivées partielles de f sont définies sur $\mathbb{R}^2$ tout entier et en particulier que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(O) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(O) = 0.$$

3.

❧ *D'après le Théorème fondamental* ***[Ch.20 - 56]****, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ tout entier si, et seulement si, ses dérivées partielles sont définies et continues sur $\mathbb{R}^2$.*

On a déjà démontré qu'elles étaient définies sur $\mathbb{R}^2$ tout entier et continues sur l'ouvert U au moins. Il reste donc à étudier la continuité des deux dérivées partielles au point O.

Pour cela, comme on l'a fait plus haut, il faut comparer l'expression générale

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \qquad \textit{pour } (x, y) \in U$$

à la valeur particulière

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0.$$

En appliquant les règle usuelles de dérivation, on trouve

$$\forall\,(x, y) \in U, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y^3}{(x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

On en déduit que, pour tout $(x, y) \in U$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)\right| = \frac{r^3 |\sin\theta|^3}{r^3} = |\sin\theta|^3.$$

Cette expression varie en fonction de θ et est indépendante de r, donc elle n'a pas de limite lorsque r tend vers 0, ce qui prouve que la dérivée partielle

$$\frac{\partial f}{\partial x}$$

n'est pas continue au point $O = (0, 0)$ et donc que f n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ tout entier, mais seulement de classe $\mathscr{C}^1$ sur U.

❧ *Inutile de calculer la dérivée partielle*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$$

pour deux raisons !

Pour que f soit de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, il faudrait que les deux dérivées partielles fussent continues au point O. Dès lors que l'une des deux au moins n'est pas continue, la question est réglée.

D'autre part, la symétrie de f

$$\forall (x, y) \in U, \quad f(x, y) = f(y, x)$$

nous assure que la seconde dérivée partielle ne serait pas plus continue que la première...

❧ *Pour démontrer que la dérivée partielle n'est pas continue à l'origine, on aurait pu invoquer le Théorème de composition des limites.*

Quel que soit le réel α, la fonction

$$[x \mapsto (x, \alpha x)]$$

est continue sur $\mathbb{R}$ (ses deux composantes sont polynomiales) et tend vers O lorsque x tend vers 0 (les deux composantes tendent vers 0).

*Par conséquent **[Ch.24 - 13]**, si $\partial f/\partial x$ était continue au point O, alors la composée*

$$\left[x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, \alpha x)\right]$$

serait continue en $x = 0$. Mais voilà !

$$\forall\, x \neq 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, \alpha x) = \frac{\alpha^3}{(1+\alpha^2)^{3/2}} \cdot \operatorname{sgn}(x)$$

et, lorsque x tend vers 0, cette quantité ne tend pas vers

$$\frac{\partial f}{\partial x}(O) = 0$$

à moins que $\alpha = 0$.

Question subsidiaire.

❧ *La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2$, elle admet des dérivées partielles au point O, donc elle pourrait être différentiable au point O bien qu'elle ne soit pas de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Qu'en est-il au juste ?*

❧ On sait que $f(O) = 0$ et que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(O) = \frac{\partial f}{\partial y}(O) = 0.$$

Par **[Ch.20 - 25.1]**, si f est différentiable au point O, alors nécessairement

$$f(O + \mathbf{h}) = o(\mathbf{h})$$

pour $\mathbf{h} = (x, y)$ voisin de $\mathbf{0} = (0, 0)$.

❧ *Par définition, cette relation signifie que*

$$\lim_{\mathbf{h} \to \mathbf{0}} \frac{f(O + \mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = 0$$

où la condition $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$ signifie que la norme $\|\mathbf{h}\|$ tend vers $0 = \|\mathbf{0}\|$.

❧ Or, pour $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \in U$,

$$\frac{\left|f(O + \mathbf{h})\right|}{\|\mathbf{h}\|} = \frac{1}{r} \cdot \frac{r^2|\cos\theta\sin\theta|}{r} = |\sin\theta\cos\theta|$$

et on constate que cette quantité dépend de θ mais pas de r. Par conséquent, elle ne peut pas tendre vers 0 lorsque r tend vers 0 et donc

$$f(O + \mathbf{h}) \neq o(\mathbf{h})$$

lorsque h tend vers 0.

► Conclusion : La fonction f n'est donc pas différentiable au point O.

Cela démontre une seconde fois qu'elle n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ tout entier.