Lois de probabilités - mai 2020

Les questions indexées par des numéros différents sont indépendantes.
Toutes les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé

$$(\Omega, \Theta, \mathbf{P}).$$

1.

On considère trois variables aléatoires X, Y et Z qui suivent toutes la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 1$.

$\boxed{\textbf{1.a.}}$ On peut calculer la loi de XYZ.

❍ Vrai ● Faux

Il est clair que XYZ est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ (en tant que produit de variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$).

❧ *Mais comme on ne connaît pas la loi conjointe du triplet (X, Y, Z), on n'a aucun moyen de calculer la loi de XYZ.*

❧ *Plus concrètement, il est clair que*

$$X(\omega)Y(\omega)Z(\omega) = 1 \iff X(\omega) = Y(\omega) = Z(\omega) = 1$$

(c'est un produit d'entiers naturels) et donc

$$[XYZ = 1] = [X = 1] \cap [Y = 1] \cap [Z = 1].$$

D'après la Formule des probabilités composées,

$$\mathbf{P}(XYZ = 1) = \mathbf{P}(X = 1) \times \mathbf{P}(Y = 1 \mid X = 1) \times \mathbf{P}(Z = 1 \mid X = 1, Y = 1).$$

On connaît la valeur de $\mathbf{P}(X = 1)$ (puisqu'on dispose des trois lois marginales). Mais ne connaissant pas la loi conjointe du triplet (X, Y, Z), on n'a aucun moyen de calculer les deux probabilités conditionnelles.

1.b. On peut calculer l'espérance de XYZ.

❍ Vrai ● Faux

Mêmes raisons ! En admettant que XYZ soit d'espérance finie, son espérance serait la somme

$$\sum_{(i,j,k)\in\mathbb{N}^3} ijk\,\mathbf{P}(X=i, Y=j, Z=k)$$

(d'après la Formule de transfert **[Ch.14 - 49.2]***) et l'énoncé ne nous dit rien sur la loi conjointe du triplet (X, Y, Z).*

On sait que X, Y et Z sont des variables aléatoires d'espérance finie.

***Si** on savait que X, Y et Z étaient* indépendantes, *on pourrait* **[Ch.15 - 25.1]** *en déduire que le produit XYZ est aussi une variable aléatoire d'espérance finie et que*

$$\mathbf{E}(XYZ) = \mathbf{E}(X)\,\mathbf{E}(Y)\,\mathbf{E}(Z) = 1^3.$$

Mais si on savait que X, Y et Z étaient indépendantes, on connaîtrait surtout la loi conjointe du triplet (X, Y, Z) ! En effet,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X=i, Y=j, Z=k) &\\ &= \mathbf{P}(X=i)\,\mathbf{P}(Y=j)\,\mathbf{P}(Z=k)\\ &= e^{-3}\frac{1^{i+j+k}}{i!j!k!}\end{aligned}$$

quels que soient i, j, k dans $\mathbb{N}$.

1.c. On peut calculer l'espérance de $X+Y+Z$.

● Vrai ❍ Faux

On sait que X, Y et Z sont des variables aléatoires d'espérance finie et que

$$\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(Y) = \mathbf{E}(Z) = 1.$$

Par linéarité de l'espérance **[Ch.14 - 52]***, on en déduit que $X+Y+Z$ est une variable aléatoire d'espérance finie et que*

$$\mathbf{E}(X+Y+Z) = 3.$$

1.d. On peut calculer la variance de $X+Y+Z$.

❍ Vrai ● Faux

D'après **[Ch.14 - 87.1]***,*

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(X+Y+Z) &\\ &= \mathbf{V}(X)+\mathbf{V}(Y)+\mathbf{V}(Z)\\ &\quad + 2\,\mathbf{Cov}(X,Y) + 2\,\mathbf{Cov}(Y,Z) + 2\,\mathbf{Cov}(Z,X)\end{aligned}$$

Comme X, Y et Z suivent la loi de Poisson $\mathscr{P}(1)$, on sait que

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{V}(Y) = \mathbf{V}(Z) = 1.$$

Mais comme on ne connaît pas les lois conjointes des trois couples (X, Y), (Y, Z) et (Z, X), on ne peut pas calculer les covariances.

Ici aussi, si les trois variables étaient indépendantes, on pourrait en déduire que les trois covariances sont nulles — mais cette hypothèse d'indépendance nous donnerait surtout la loi du triplet (X, Y, Z).

2.

Soit X, une variable aléatoire qui suit la loi géométrique de paramètre $p = 1/2$.

2.a. L'espérance de X est égale à :

❏ $1/2$

❏ 1

✔ 2

❏ Une autre valeur

L'espérance d'une variable aléatoire qui suit la loi géométrique $\mathscr{G}(p)$ est égale à $1/p$.

2.b. La variance de X est égale à :

❏ $1/4$

❏ $1/2$

✔ 2

❏ 4

❏ Une autre valeur

La variance d'une variable aléatoire qui suit la loi géométrique $\mathscr{G}(p)$ est égale à q/p^2.

2.c. La valeur de $\mathbf{E}(X^2)$ est égale à :

❏ 2

❏ 4

✔ 6

❏ Une autre valeur

❏ Aucune idée, il faudrait poser le calcul !

D'après la Formule de Koenig-Huyghens,

$$\mathbf{E}(X^2) = \mathbf{V}(X) + [\mathbf{E}(X)]^2 = 2 + 2^2.$$

Connaître les propriétés des lois discrètes de référence, c'est aussi pouvoir faire ce genre de calculs de tête...

2.d. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la variable aléatoire X^n est d'espérance finie.

● Vrai ❍ Faux

D'après la Formule de transfert, X^n est une variable aléatoire d'espérance finie si, et seulement si, la série

$$\sum k^n\,\mathbf{P}(X = k) = \sum \frac{k^n}{2^k}.$$

Or le rayon de convergence de la série entière $\sum x^k$ est égal à 1 donc **[Ch.12 - 24]** *quel que soit l'entier $n \in \mathbb{N}$, le rayon de convergence de la série entière $\sum k^n x^k$ est aussi égal à 1.*
Par conséquent (avec $x = 1/2$), la série

$$\sum \frac{k^n}{2^k}$$

converge (absolument).

Le même argument s'applique pour la loi géométrique $\mathscr{G}(p)$, quel que soit le paramètre $0 < p < 1$.

3.

Soient X et Y, deux variables aléatoires qui suivent la loi géométrique de paramètre $p = 1/2$.

$\boxed{\textbf{3.a.}}$ Choisissez la bonne réponse.

❏ $\mathbf{E}(X) > \mathbf{E}(Y)$

✔ $\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(Y)$

❏ $\mathbf{E}(X) < \mathbf{E}(Y)$

❏ Ça dépend de la loi du couple.

❏ C'est absurde !

On sait **[Ch.14 - 43]** *que X et Y sont des variables aléatoires d'espérance finie, donc les propriétés ne sont pas absurdes !*
De plus, X et Y ont même loi, donc **[Ch.14 - 44]** *leurs espérances sont égales.*

$\boxed{\textbf{3.b.}}$ La probabilité $\mathbf{P}(X > Y)$ est strictement positive.

❏ Vrai

❏ Faux

✔ Ça dépend de la loi du couple.

On connaît seulement les lois de X et de Y, mais pas la loi du couple (X, Y).

❧ *Supposons que X et Y soient indépendantes. Dans ce cas, les deux couples*

$$(X, Y) \quad et \quad (Y, X)$$

ont même loi :

$$\begin{aligned}\forall\, i, j \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(X = i, Y = j) &= \mathbf{P}(X = i)\,\mathbf{P}(Y = j)\\ &= \mathbf{P}(Y = i)\,\mathbf{P}(X = i)\\ &= \mathbf{P}(Y = i, X = j).\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\mathbf{P}\big(f(X, Y) > 0\big) = \mathbf{P}\big(f(Y, X) > 0\big)$$

pour tout fonction f et en particulier, pour

$$f(i, j) = i - j,$$

on en déduit que

$$\mathbf{P}(X > Y) = \mathbf{P}(X < Y).$$

Comme

$$\Omega = [X = Y] \sqcup [X < Y] \sqcup [X > Y],$$

on en déduit que

$$\mathbf{P}(X > Y) = \frac{1 - \mathbf{P}(X = Y)}{2}.$$

Mais

$$[X = Y] = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}^*} [X = k, Y = k]$$

donc, comme X et Y sont indépendantes et de même loi,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X = Y) &= \sum k \in \mathbb{N}^* [\mathbf{P}(X = k)]^2\\ &< \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \mathbf{P}(X = k) = 1,\end{aligned}$$

l'inégalité stricte provenant du fait que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad 0 < \mathbf{P}(X = k) < 1.$$

Dans ce cas particulier,

$$\mathbf{P}(X > Y) > 0.$$

❧ *Supposons maintenant que $X = Y$, hypothèse compatible avec l'égalité en loi. Il est clair que, dans ce cas, X et Y ne sont pas indépendantes, que*

$$[X > Y] = \varnothing$$

et donc que

$$\mathbf{P}(X > Y) = 0.$$

$\boxed{\textbf{3.c.}}$ L'inégalité

$$\mathbf{E}(XY) \leqslant \mathbf{E}(X^2)$$

est

- ✔ Vraie
- ❏ Fausse
- ❏ Ça dépend de la loi du couple !
- ❏ Aucune idée...

Comme X et Y suivent une loi géométrique, ce sont des variables aléatoires qui admettent un moment d'ordre deux **[Ch.14 - 80]**.
D'après l'inégalité de Schwarz (qui ne figure pas dans le poly, bizarre !),

$$\mathbf{E}(XY) \leqslant \sqrt{\mathbf{E}(X^2)}\sqrt{\mathbf{E}(Y^2)}.$$

Comme X et Y suivent la même loi, alors X^2 et Y^2 suivent la même loi **[Ch.14 - 31]** *et en particulier, elles ont même espérance* **[Ch.14 - 44.1]***, donc*

$$\mathbf{E}(XY) \leqslant \mathbf{E}(X^2).$$

4.

Soient X et Y, deux variables aléatoires.
On suppose que X suit la loi géométrique de paramètre $p = 1/2$ et que Y suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 1/2$.

$\boxed{\textbf{4.a.}}$ Choisissez la bonne réponse.

- ✔ $\mathbf{E}(X) > \mathbf{E}(Y)$
- ❏ $\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(Y)$
- ❏ $\mathbf{E}(X) < \mathbf{E}(Y)$
- ❏ Ça dépend.

L'espérance de la loi $\mathscr{G}(p)$ est égale à $1/p$ et celle de la loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$ est égale à λ, donc

$$\mathbf{E}(X) = 2 > \frac{1}{2} = \mathbf{E}(Y).$$

$\boxed{\textbf{4.b.}}$ La probabilité $\mathbf{P}(X > Y)$ est strictement positive.

✔ Vrai

❏ Faux

❏ Ça dépend de la loi du couple.

Si $\mathbf{P}(X > Y)$ n'était pas strictement positive, alors

$$\mathbf{P}(X > Y) = 0$$

et par passage au complémentaire

$$\mathbf{P}(X \leqslant Y) = 1.$$

Par positivité de l'espérance **[Ch.14 - 56]**, *on pourrait en déduire que*

$$\mathbf{E}(X) \leqslant \mathbf{E}(Y),$$

ce qui est faux comme on vient de le voir.
Donc $\mathbf{P}(X > Y) > 0$.

L'inégalité stricte *entre les espérances nous permet de nous passer de la loi du couple pour conclure.*

5.

Soient X, Y et Z, trois variables aléatoires indépendantes.
On suppose que X et Y suivent la loi géométrique de paramètre $p = 1/2$ et que Z suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 1/2$.

$\boxed{\textbf{5.a.}}$ Je peux calculer la loi de $X + Y$.

● Vrai ❍ Faux

Comme X et Y sont des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, la somme $X + Y$ est aussi une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et

$$[X + Y = n] = \bigsqcup_{k=0}^{n} [X = k] \cap [Y = n - k]$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Il faut systématiquement penser à utiliser les systèmes complets d'événements associés à X et à Y pour étudier une variable aléatoire de la forme $f(X, Y)$.
Par additivité de $\mathbf{P}$, on en déduit que

$$\mathbf{P}(X + Y = n) = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(X = k, Y = n - k)$$

et comme X et Y sont supposées indépendantes,

$$\mathbf{P}(X + Y = n) = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(X = k)\,\mathbf{P}(Y = n - k).$$

Connaissant les deux lois marginales, on en déduit que

$$\forall\, n \geqslant 2, \quad \mathbf{P}(X + Y = n) = \frac{n-1}{2^n}$$

et aussi que $\mathbf{P}(X + Y = 0) = \mathbf{P}(X + Y = 1) = 0$.

$\boxed{\textbf{5.b.}}$ Je peux calculer la loi de $X + Z$.

● Vrai ❍ Faux

On suit la même démarche et on arrive à

$$\mathbf{P}(X + Z = 0) = 0$$

et

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X + Z = n) &= e^{-1/2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{(1/2)^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= \frac{e^{-1/2}}{2^n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}\end{aligned}$$

pour tout entier $n \geqslant 1$.
On ne peut pas simplifier cette expression...
Néanmoins, on a bien identifié l'ensemble des valeurs prises par la variable $X + Z$ et calculé une expression des probabilités $\mathbf{P}(X + Z = n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
On a donc bien calculé la loi de $X + Z$.

$\boxed{\textbf{5.c.}}$ Les couples (X, X) et (X, Y) suivent la même loi.

❍ Vrai ● Faux

Dans le couple (X, X), les deux variables aléatoires ne sont pas indépendantes :

$$\mathbf{Cov}(X, X) = \mathbf{V}(X) > 0$$

alors que dans le couple (X, Y), les deux variables sont indépendantes (par hypothèse), donc les deux couples ne suivent pas la même loi.

Les lois marginales sont les mêmes dans les deux couples, puisque

$$X \overset{\text{loi}}{=} X \quad \textit{et} \quad X \overset{\text{loi}}{=} Y$$

mais cela ne suffit pas pour que les couples suivent la même loi.

$\boxed{\textbf{5.d.}}$ Les couples (X, Y) et (X, Z) suivent la même loi.

❍ Vrai ● Faux

La loi de la deuxième composante n'est pas la même dans les deux couples :

$$Y \overset{\textit{loi}}{\neq} Z$$

donc les couples ne suivent pas la même loi.

Dans les deux couples, les composantes sont indépendantes (par hypothèse), mais cela ne suffit pas pour que les couples suivent la même loi.

5.e. Choisissez la bonne réponse.

❏ $\mathbf{E}(XZ) < 1$

✔ $\mathbf{E}(XZ) = 1$

❏ $\mathbf{E}(XZ) > 1$

❏ L'espérance de XZ n'est pas définie.

On sait **[Ch.14 - 43]** *que X et Z sont des variables aléatoires d'espérance finie. Comme ces variables sont indépendantes (par hypothèse), on en déduit* **[Ch.15 - 25.1]** *que XZ est bien une variable aléatoire d'espérance finie et que*

$$\mathbf{E}(XZ) = \mathbf{E}(X)\,\mathbf{E}(Z) = 2 \times \frac{1}{2} = 1.$$

6.

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes la loi de Bernoulli de paramètre $p = 1/2$ (modèle du jeu de Pile ou Face).

6.a.

$$(X_1, X_1) \overset{\text{loi}}{=} (X_1, X_2)$$

❍ Vrai ● Faux

Dans le premier couple, les deux composantes sont corrélées :

$$\mathbf{Cov}(X_1, X_1) = \mathbf{V}(X_1) = \frac{1}{4}$$

alors que dans le second couple, les deux composantes sont indépendantes.

6.b.

$$(X_1, X_2) \overset{\text{loi}}{=} (X_1, 1 - X_2)$$

● Vrai ❍ Faux

Comme X_1 et X_2 sont indépendantes (par hypothèse), les deux variables X_1 et $1 - X_2 = f(X_2)$ sont indépendantes **[Ch.15 - 24.3]**.
Comme X_2 suit la loi de Bernoulli $\mathscr{B}(1/2)$, la variable

$$1 - X_2$$

prend les valeurs

$$1 = 1 - 0 \qquad \textit{et} \qquad 0 = 1 - 1,$$

donc $1 - X_2$ est une variable de Bernoulli et comme

$$\mathbf{P}(1 - X_2 = 1) = \mathbf{P}(X_2 = 0) = 1/2,$$

on en déduit qu'elle suit la loi de Bernoulli $\mathscr{B}(1/2)$.
Dans les deux couples, les deux composantes sont indépendantes et les lois marginales sont égales deux à deux :

$$X_1 \overset{\text{loi}}{=} X_1 \qquad \textit{et} \qquad X_2 \overset{\text{loi}}{=} 1 - X_2$$

donc les deux couples suivent la même loi.

$\boxed{\textbf{6.c.}}$

$$(X_1, X_2) \overset{\text{loi}}{=} (X_2, X_3)$$

● Vrai ❍ Faux

Même raisonnement !
Dans les deux couples, les deux composantes sont indépendantes et les lois marginales sont égales deux à deux :

$$X_1 \overset{\text{loi}}{=} X_2 \qquad et \qquad X_2 \overset{\text{loi}}{=} X_3$$

donc les deux couples suivent la même loi.

$\boxed{\textbf{6.d.}}$ Les vecteurs aléatoires (X_1, X_2) et (X_2, X_3) sont indépendants.

❍ Vrai ● Faux

La présence de X_2 dans les deux couples empêche d'appliquer le lemme des coalitions **[Ch.15 - 24]**, *donc on* devine *que les deux vecteurs aléatoires ne sont pas indépendants.* Mais ce n'est pas une preuve !
Par hypothèse, X_1 et X_2 sont indépendantes, donc

$$\mathbf{P}(X_1 = 1, X_2 = 0) = \mathbf{P}(X_1 = 1)\,\mathbf{P}(X_2 = 0) = \frac{1}{4}.$$

De même, comme X_2 et X_3 sont indépendantes,

$$\mathbf{P}(X_2 = 1, X_3 = 0) = \mathbf{P}(X_2 = 1)\,\mathbf{P}(X_3 = 0) = \frac{1}{4}.$$

Mais comme X_2 ne peut pas être égale à 0 et à 1 en même temps,

$$[X_1 = 1, X_2 = 0] \cap [X_2 = 1, X_3 = 0] = \varnothing$$

et donc

$$\mathbf{P}\big([X_1 = 1, X_2 = 0] \cap [X_2 = 1, X_3 = 0]\big) = 0.$$

On en déduit que

$$\mathbf{P}\big([(X_1,X_2) = (1,0)] \cap [(X_2,X_3) = (1,0)]\big) \neq \mathbf{P}[(X_1,X_2) = (1,0)]\,\mathbf{P}[(X_2,X_3) = (1,0)]$$

et donc que les vecteurs (X_1, X_2) et (X_2, X_3) ne sont pas indépendants.
Cette fois, c'est démontré !

$\boxed{\textbf{6.e.}}$

$$(X_1, X_2) \overset{\text{loi}}{=} (X_3, X_4)$$

● Vrai ❍ Faux

Même raisonnement qu'au $\boxed{\textbf{6.c.}}$.

$\boxed{\textbf{6.f.}}$ Les vecteurs aléatoires (X_1, X_2) et (X_3, X_4) sont indépendants.

● Vrai ❍ Faux

Cette fois, on peut appliquer le lemme des coalitions !

6.g.

$$X_1^2 \overset{\text{loi}}{=} X_2X_3$$

❍ Vrai ● Faux

Comme X_1 suit une loi de Bernoulli,

$$\forall\, \omega \in \Omega, \quad X_1^2(\omega) = X_1(\omega)$$

donc X_1^2 suit la loi $\mathscr{B}(1/2)$.
Comme X_2 et X_3 suivent une loi de Bernoulli, le produit X_2X_3 prend les valeurs

$$1 = 1 \times 1 \quad \textit{et} \quad 0 = 1 \times 0 = 0 \times 1 = 0 \times 0$$

et suit donc une loi de Bernoulli. Son paramètre est

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X_2X_3 = 1) &= \mathbf{P}(X_2 = 1, X_3 = 1)\\ &= \mathbf{P}(X_2 = 1)\,\mathbf{P}(X_3 = 1) = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

puisque X_2 et X_3 sont indépendantes, donc X_2X_3 suit la loi $\mathscr{B}(1/4)$.
Variante *On pouvait aussi calculer $\mathbf{E}(X_2X_3)$ en exploitant l'indépendance des deux facteurs* **[Ch.15 - 25.1]** *et constater que cette espérance n'était pas égale à $1/2$.*

6.h. Les variables aléatoires X_1^2 et X_2X_3 sont indépendantes.

● Vrai ❍ Faux

Comme (X_1, X_2, X_3) est une famille de variables aléatoires indépendantes, le lemme des coalitions prouve que

$$f(X_1) \qquad \textit{et} \qquad g(X_2, X_3)$$

sont indépendantes, quelles que soient les fonctions f et g qu'on choisisse.
Faut-il préciser que $f(t) = t^2$ et $f(u, v) = uv$?

$\boxed{\textbf{6.i.}}$ Les variables aléatoires X_1X_2 et X_2X_3 sont indépendantes.

❍ Vrai ● Faux

Comme au $\boxed{\textbf{6.d.}}$*, la présence de* X_2 *dans les deux expressions nous fait* deviner *que les deux variables ne sont pas indépendantes.*

D'après $\boxed{\textbf{6.g.}}$*, les variables* X_1X_2 *et* X_2X_3 *suivent toutes les deux la loi* $\mathscr{B}(1/4)$*, donc*

$$\mathbf{P}(X_1X_2 = 1) = \mathbf{P}(X_2X_3 = 1) = \frac{1}{4}.$$

Mais

$$\begin{aligned}&[X_1X_2 = 1] \cap [X_2X_3 = 1]\\ &\qquad = [X_1 = 1] \cap [X_2 = 1] \cap [X_3 = 1]\end{aligned}$$

et comme X_1*,* X_2 *et* X_3 *sont indépendantes, on en déduit que*

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X_1X_2 = 1, X_2X_3 = 1) &= \frac{1}{8}\\ &\neq \mathbf{P}(X_1X_2 = 1)\,\mathbf{P}(X_2X_3 = 1) = \frac{1}{16},\end{aligned}$$

ce qui prouve *que* X_1X_2 *et* X_2X_3 *ne sont pas indépendantes.*

Prenez le temps de réfléchir un peu avant de suivre votre intuition !
À deux reprises, j'ai pris soin de bien distinguer ce qu'on devine de ce qu'on démontre.
Dans ces deux exemples, la démonstration confirmait l'intuition, mais ce n'est pas toujours le cas...