La **résolution d'un système linéaire** par l'algorithme du pivot comporte deux phases.

La première phase consiste à transformer le système donné en un système triangulaire par des opérations de pivot.

La seconde phase consiste à résoudre le système triangulaire. Lorsqu'il ne s'agit pas d'un système de Cramer, cette seconde phase est marquée par l'introduction d'un certain nombre de paramètres.

C'est en fonction de ces paramètres que les solutions seront exprimées.

Un bon choix de paramètres permet d'exprimer les solutions de la manière la plus simple possible (sans avoir à calculer sur des fractions, par exemple).

UN PEU DE THÉORIE.—

On considère un système homogène triangulaire de n équations en fonction de p inconnues.

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n + \cdots + a_{1,p}x_p = 0 \\ \qquad\quad a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n + \cdots + a_{2,p}x_p = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{n,n}x_n + \cdots + a_{n,p}x_p = 0 \end{cases}$$

On peut considérer que ce système traduit l'équation

$$\varphi(x) = 0 \in \mathbb{K}^n$$

où $x = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ et $\varphi \in \mathrm{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$. Il s'agit donc de calculer les éléments du noyau de φ et en fait d'expliciter une base de $\operatorname{Ker} \varphi$.

Lorsque les coefficients diagonaux du système triangulaire sont tous différents de 0, les n équations du système sont indépendantes, ce qui revient en fait à dire que le rang de l'application linéaire φ est égal à n.

D'après le théorème du rang, la dimension du noyau de φ est égale à $p - n$. (Le nombre d'inconnues, c'est-à-dire de colonnes, est égal à la dimension de l'espace de départ.)

Autrement dit, l'ensemble S_H des solutions du système est un espace vectoriel de dimension $(p - n)$, ce qui signifie que le cardinal de toute base de S_H est égal à $(p - n)$.

EXERCICE 1.—

On considère un système de $n = 1$ équation (linéaire homogène) en p inconnues. L'ensemble S_H des solutions est donc un espace vectoriel de dimension $(p - 1)$.

D'un point de vue géométrique, on cherche ici une base de l'hyperplan d'équation

$$a_1x_1 + \cdots + a_px_p = 0$$

c'est-à-dire une famille de $(p - 1)$ solutions linéairement indépendantes dans $\mathbb{K}^p$.

- Le couple (x, y) est une solution de

$$x + 2y = 0$$

si, et seulement si, il existe $u \in \mathbb{R}$ tel que

$$x = -2u \quad \text{et} \quad y = u$$

c'est-à-dire

$$(x, y) = u \cdot (-2, 1).$$

L'espace des solutions est donc la droite dirigée par $(-2, 1)$.

- Le triplet (x, y, z) est une solution de

$$3x + y - z = 0$$

si, et seulement si, il existe deux paramètres $u \in \mathbb{R}$ et $v \in \mathbb{R}$ tels que

$$x = u, \quad y = v \quad \text{et} \quad z = 3u + v$$

c'est-à-dire

$$(x, y, z) = u \cdot (1, 0, 3) + v \cdot (0, 1, 1).$$

L'espace des solutions est donc le plan

$$\operatorname{Vect}\big((1, 0, 3), (0, 1, 1)\big).$$

❧ Le quadruplet (x, y, z, t) est une solution de

$$x - 2y + z + t = 0$$

si, et seulement si, il existe trois paramètres réels u, v et w tels que

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = w \\ t = -u + 2v - w \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}(x, y, z, t) = {} & u \cdot (1, 0, 0, -1) \\ & + v \cdot (0, 1, 0, 2) + w \cdot (0, 0, 1, -1)\end{aligned}$$

donc S_H est égal à

$$\mathrm{Vect}\big((1, 0, 0, -1), (0, 1, 0, 2), (0, 0, 1, -1)\big).$$

❧ Le quadruplet (x, y, z, t) est une solution de

$$x - y + 2t = 0$$

si, et seulement si, il existe trois paramètres réels u, v et w tels que

$$\begin{cases} x = u \\ y = u + 2w \\ z = v \\ t = w \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}(x, y, z, t) = {} & u \cdot (1, 1, 0, 0) \\ & + v \cdot (0, 0, 1, 0) + w \cdot (0, 2, 0, 1)\end{aligned}$$

donc S_H est égal à

$$\mathrm{Vect}\big((1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 2, 0, 1)\big).$$

AUTRES EXEMPLES

Pour éviter les fractions, il est utile de faire un peu d'arithmétique au moment de choisir les paramètres.

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 0 \\ 5x + 4y &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + 2z &= 0 \\ 2x + 3y - z &= 0 \\ 2x + 3y - 4z &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + 2y - z + 3t &= 0 \\ 2x - 3y + z - t &= 0 \\ -2x + 3y + 2z - 5t &= 0 \end{aligned}$$

EXERCICE 2.—

On considère un système de $n = 2$ équations (linéaires homogènes) en p inconnues. L'ensemble S_H des solutions est donc un espace vectoriel de dimension $(p - 2)$.

D'un point de vue géométrique, on cherche une base de l'intersection de deux hyperplans.

❧ Le triplet (x, y, z) est une solution du système

$$\begin{cases} 3x - y + z = 0 \\ x + 2z = 0 \end{cases}$$

si, et seulement si, il existe un réel u tel que

$$\begin{cases} x = -2u \\ y = -5u \\ z = u \end{cases}$$

donc l'espace S_H des solutions est la droite vectorielle dirigée par

$$(2, 5, -1).$$

❧ Le quadruplet (x, y, z, t) est une solution du système

$$\begin{cases} x + y - t = 0 \\ x - 2z = 0 \end{cases}$$

si, et seulement si, il existe deux paramètres réels u et v tels que

$$\begin{cases} x = 2u \\ y = v \\ z = u \\ t = 2u + v \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$(x, y, z, t) = u \cdot (2, 0, 1, 2) + v \cdot (0, 1, 0, 1),$$

donc l'espace S_H des solutions est le plan

$$\mathrm{Vect}\big((2, 0, 1, 2), (0, 1, 0, 1)\big).$$

AUTRES EXEMPLES

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - 3z = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5x + 2y - 3z = 0 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y - z + t = 0 \\ 2x + 3y - z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -x + 3y - 2z + 2t = 0 \\ y + z - 3t = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + 2y - 3t = 0 \\ 3x - 3y + z - t = 0 \end{cases}$$

EXERCICE 3.—

On considère un système de $n = 3$ équations (linéaires homogènes) en $p = 4$ inconnues. L'ensemble S_H des solutions est donc un espace vectoriel de dimension $(p - n) = 1$.

D'un point de vue géométrique, on cherche un vecteur directeur de la droite vectorielle commune à trois hyperplans de $\mathbb{R}^4$.

☙ Le quadruplet (x, y, z, t) est une solution du système

$$\begin{cases} x + 3y - z + t = 0 \\ y + 2z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

si, et seulement si, il existe un paramètre $u \in \mathbb{R}$ tel que

$$x = 2u, \quad y = -2u, \quad z = u, \quad t = 5u$$

donc l'ensemble S_H des solutions est la droite vectorielle dirigée par le vecteur $(2, -2, 1, 5)$.

AUTRES EXEMPLES

$$\begin{cases} 2x + y + z + 2t = 0 \\ 2x - y - t = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x - y + 2z - 3t = 0 \\ y + z + 2t = 0 \\ 2y + 3t = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2y - z + 2t = 0 \\ 5y + 3t = 0 \\ 2x + y - 2t = 0 \end{cases}$$