

[39] La propriété $A \perp B$ signifie exactement

$$\forall x \in A, \forall y \in B, \quad \langle x | y \rangle = 0$$

et [Ch.17 - 33.3] se traduit par l'inclusion

$$A \subset B^\perp$$

et par l'inclusion

$$B \subset A^\perp.$$

En dépit des apparences, ces deux inclusions sont équivalentes et ne prouvent donc pas l'égalité $A^\perp = B$.

♣ Pour en déduire l'égalité $A^\perp = B$, on a le choix entre démontrer l'inclusion réciproque

$$A^\perp \subset B$$

ou vérifier l'égalité des dimensions (à condition que E soit un espace de dimension finie).

Cette inclusion réciproque est assez délicate à établir, car il s'agit de prouver que

$$\forall x \in E, \quad \underbrace{(\forall y \in A, \quad \langle x | y \rangle = 0)}_{x \in A^\perp} \implies x \in B.$$

Attention ! Les égalités

$$A^\perp = B \quad \text{et} \quad A = B^\perp$$

sont équivalentes dans un espace euclidien, mais elles ne sont pas équivalentes en général. Dans un espace de dimension infinie, il est donc possible que

$$A^\perp = B \quad \text{en même temps que} \quad A \subsetneq B^\perp.$$

[40] En général, l'inégalité de Cauchy-Schwarz [Ch.17 - 12] s'exprime par

$$|\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

► Cette inégalité est fondamentale pour la théorie, car elle permet de démontrer que la norme associée au produit scalaire est bien une norme : l'inégalité triangulaire est une conséquence de l'inégalité de Schwarz, il me paraît impossible de démontrer l'inégalité triangulaire pour une telle norme sans démontrer l'inégalité de Schwarz.

Cette inégalité est aussi d'une importance extrême dans la pratique : on exagère à peine en disant que toute inégalité dans un espace préhilbertien/euclidien est une conséquence de l'inégalité de Schwarz.

Il est intéressant de relire la démonstration pour constater qu'on utilise toutes les propriétés du produit scalaire sauf une : l'inégalité de Schwarz est en fait vraie pour toute forme bilinéaire symétrique positive, même si cette forme n'est pas définie positive.

► Il est important de connaître les **cas d'égalité**. Pour simplifier, on suppose ici que les vecteurs x et y sont différents de 0_E .

Si $|\langle x | y \rangle| = \|x\| \|y\|$, alors x et y sont colinéaires.

Si $\langle x | y \rangle = \|x\| \|y\|$ (sans la valeur absolue), alors x et y sont colinéaires et de même sens :

$$\exists \alpha > 0, \quad y = \alpha \cdot x.$$

Si $\langle x|y \rangle = -\|x\| \|y\|$, alors x et y sont colinéaires et de sens opposés :

$$\exists \alpha < 0, \quad y = \alpha \cdot x.$$

Ces cas d'égalité reposent en particulier sur le fait que le produit scalaire est défini positif. Ils sont donc moins généraux que l'inégalité de Schwarz elle-même.

► Exemples d'applications

L'inégalité de Schwarz s'applique aux produits scalaires définis par des sommes :

$$\sum_{i=1}^d x_i y_i, \quad \text{tr}({}^tAB), \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x_n y_n}{2^n},$$

ainsi qu'aux formes bilinéaires symétriques positives (même s'il ne s'agit pas d'un produit scalaire) :

$$\int_a^b f(t)g(t) \underbrace{K(t)}_{\geq 0} dt, \quad \text{Cov}(X, Y).$$

[41.1] Projeté orthogonal

Si $(e_1, \dots, e_r)$ est une base orthogonale du sous-espace F , alors le projeté orthogonal de x sur F est donné par la formule

$$p(x) = \sum_{k=1}^r \langle e_k | x \rangle \cdot \frac{e_k}{\|e_k\|^2}.$$

► Si on connaît une base

$$\mathcal{B}_F = (e_1, \dots, e_r)$$

du sous-espace F qui n'est même pas une base orthogonale, le calcul du projeté orthogonal devient sensiblement moins simple.

▷ Tout repose sur les deux propriétés qui le caractérisent habituellement [Ch.17 - 47.4].

▷ Tout d'abord $p(x) \in F$ donc il existe des scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ tels que

$$p(x) = \sum_{j=1}^r \alpha_j \cdot e_j.$$

▷ D'autre part $x - p(x) \in F^\perp$, c'est-à-dire

$$\forall 1 \leq i \leq r, \quad \langle x - p(x) | e_i \rangle = 0$$

ou encore

$$\forall 1 \leq i \leq r, \quad \sum_{j=1}^r \langle e_j | e_i \rangle \alpha_j = \langle x | e_i \rangle.$$

La formule du produit matriciel nous fait reconnaître ici le système

$$\Gamma \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle x | e_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle x | e_r \rangle \end{pmatrix}$$

où Γ est la matrice de Gram de la base $\mathcal{B}_F$:

$$\Gamma = (\langle e_i | e_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq r} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}).$$

→ [Ch.17 - 92 / Ch.18 - 38]

[41.2,3] Distance à un sous-espace → [Officiel 198]

En théorie, calculer la distance d'un vecteur x_0 à un sous-espace de dimension finie F dans un espace préhilbertien ou euclidien consiste essentiellement à projeter le vecteur x_0 sur F .

♣ Il est impératif de comprendre et de retenir les deux figures du cours [Ch.17 - 76] : elles résument ce qu'il faut savoir de la théorie et guide la pratique, il n'y a donc rien d'autre à savoir !

Cette dernière affirmation est un peu exagérée !

Il est quand même important de prendre conscience que le calcul de la distance de x_0 à F repose sur l'identification du vecteur $x_0 - p(x_0)$ et non pas du vecteur $p(x_0)$ lui-même [Ch.17 - 76.2].

Attention donc à ne pas faire des calculs superflus !

Si vous continuez à étudier les mathématiques, vous aurez l'occasion de mieux comprendre pourquoi cette question est si importante...

Je vous l'accorde, ça n'a l'air que d'un banal exercice de géométrie un peu rébarbatif. Mais les applications théoriques sont très nombreuses dans des domaines variés (y compris en calcul des probabilités).

[42] Base orthonormée d'un plan de $\mathbb{R}^3$

Considérons le plan $P \subset \mathbb{R}^3$ d'équation

$$[2x + 3y - z = 0].$$

► On choisit un premier vecteur dans ce plan :

$$e_1 = (1, 0, 2).$$

N'importe quelle solution non nulle de l'équation fait l'affaire, autant choisir celle qui nous paraît la plus simple.

Pour en déduire une base orthogonale de P , il nous faut trouver un vecteur $e_2 \in P$:

$$2x + 3y - z = 0$$

qui soit orthogonal à e_1 :

$$\langle e_1 | e_2 \rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x + 2z = 0.$$

Comme $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique, la base canonique est une base orthonormée et pour cette raison, la formule précédente donne bien le produit scalaire $\langle e_1 | e_2 \rangle$.

Il reste donc à choisir une solution non nulle du système

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ x + 2z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} 3y - 5z = 0 \\ x + 2z = 0 \end{cases}$$

il apparaît que $e_2 = (-6, 5, 3)$ convient.

En normalisant, on obtient une base orthonormée de P :

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 0, 2), \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{70}}(-6, 5, 3).$$

► Variante — On peut aussi choisir une base quelconque de P :

$$e_1 = (1, 0, 2), \quad e_2 = (0, 1, 3)$$

et appliquer l'algorithme de Gram-Schmidt pour en déduire une base orthogonale.

On cherche donc un scalaire λ tel que

$$e_2 + \lambda \cdot e_1 \perp e_1$$

c'est-à-dire

$$\lambda \cdot \|e_1\|^2 = -\langle e_1 | e_2 \rangle.$$

La seule valeur possible est

$$\lambda = \frac{-6}{5}$$

ce qui nous donne le vecteur

$$\begin{aligned} e'_2 &= e_2 - \frac{6}{5} \cdot e_1 = \frac{1}{5} \cdot [(0, 5, 15) - (6, 0, 12)] \\ &= \frac{1}{5} \cdot (6, -5, 3). \end{aligned}$$

Bien entendu, les deux méthodes nous donnent des vecteurs proportionnels : dans le plan P , il n'y a qu'une seule droite orthogonale au vecteur e_1 !

► Si le produit scalaire considéré n'est pas le produit scalaire canonique, il suffit de changer la formule de calcul du produit scalaire (ce qui revient à faire apparaître la matrice de Gram du produit scalaire), le principe de la méthode reste inchangé.

[43]

► Considérons le sous-espace $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_r)$.

♣ Si x est un vecteur orthogonal à F , alors il est orthogonal à tous les vecteurs de F et en particulier

$$\forall 1 \leq i \leq r, \quad \langle x | e_i \rangle = 0.$$

♣ Réciproquement, supposons que x soit orthogonal aux vecteurs $e_1, \dots, e_r$. Comme ces vecteurs engendrent F , pour tout vecteur $y \in F$, il existe des scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ tels que

$$y = \sum_{i=1}^r \alpha_i \cdot e_i$$

et donc

$$\langle x | y \rangle = \sum_{i=1}^r \alpha_i \langle x | e_i \rangle = \sum_{i=1}^r \alpha_i \cdot 0 = 0,$$

ce qui prouve que x est orthogonal à *tous* les vecteurs de F et donc à F .

► **Application dans $\mathbb{R}^4$**

On suppose que $\mathbb{R}^4$ est muni de sa structure euclidienne canonique.

Considérons le plan $P \subset \mathbb{R}^4$ engendré par les deux vecteurs

$$e_1 = (1, 5, -1, 0) \quad \text{et} \quad e_2 = (2, 0, -1, 1).$$

On sait [Ch.17 - 66.3] que son orthogonal $P^\perp$ est aussi un plan de $\mathbb{R}^4$.

♣ D'après la caractérisation précédente, le vecteur

$$W = (x, y, z, t)$$

appartient au plan $\mathbb{R}^4$ si, et seulement si,

$$\begin{cases} x + 5y - z &= 0 \\ 2x &- z + t = 0 \end{cases}.$$

Ce système de deux équations cartésiennes est une caractérisation du plan $P^\perp$!

♣ Pour calculer une base du plan $P^\perp$, il faut résoudre ce système.

$$\begin{cases} x + 5y - z &= 0 \\ 2x &- z + t = 0 \end{cases}$$

$$\iff \exists (u, v) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} x = 5u \\ y = -u + v \\ z = 5v \\ t = -10u + 5v \end{cases}$$

$$\iff \exists (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

$$(x, y, z, t) = u \cdot (5, -1, 0, -10) + v \cdot (0, 1, 5, 5)$$

Une base de $P^\perp$ est donc

$$((5, -1, 0, -10), (0, 1, 5, 5)).$$

Pour en déduire une base orthogonale ou une base orthonormée de $P^\perp$, on procède comme au [42].

On aura compris qu'il est ici infiniment plus rapide de caractériser $P^\perp$ par un système de deux équations cartésiennes que par une base orthogonale !

► Application dans $\mathbb{R}^3$

On suppose que $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique.

♣ Si le plan P est caractérisé par une équation cartésienne

$$2x + 3y - z = 0$$

on peut traduire cette équation à l'aide du produit scalaire canonique :

$$(2 \quad 3 \quad -1) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

ce qui nous montre que le vecteur (x, y, z) appartient au plan P si, et seulement si, ce vecteur est orthogonal au vecteur $(2, 3, -1)$.
Donc

$$P^\perp = \mathbb{R} \cdot (2, 3, -1).$$

♣ Si le plan P est caractérisé par une base

$$\mathcal{B} = (e_1, e_2)$$

on sait que le vecteur

$$e_3 = e_1 \wedge e_2$$

est orthogonal à e_1 et à e_2 et donc que

$$P^\perp = \mathbb{R} \cdot e_3.$$

On peut alors, en suivant le raisonnement précédent, déduire une équation cartésienne du plan P du vecteur e_3 . (Ça peut toujours servir.)

[44] On admet qu'un endomorphisme symétrique u est diagonalisable : il existe donc une base E constituée de vecteurs propres pour u .

♣ En regroupant ces vecteurs propres en fonction des valeurs propres auxquelles ils correspondent, on en déduit une base de chaque sous-espace propre de u .

♣ L'algorithme de Gram-Schmidt, appliqué dans chaque sous-espace propre, permet d'en déduire une base orthonormée pour chaque sous-espace propre de u .

♣ Comme les sous-espaces propres d'un endomorphisme symétrique sont deux à deux orthogonaux, en réunissant les bases orthonormées des différents sous-espaces propres, on obtient une base orthonormée de vecteurs propres.

C'est la logique même de la réduction des endomorphismes qui nous fait travailler ici sous-espace propre par sous-espace propre.

[45] La matrice de passage d'une base à une autre est toujours une matrice inversible.

♣ Lorsque l'ancienne base et la nouvelle base sont toutes les deux orthonormées, la matrice de passage n'est pas seulement inversible, elle est orthogonale et donc

$$P^{-1} = {}^tP.$$

Ainsi, si on part d'une base orthonormée $\mathcal{B}_1$ et qu'on détermine une base orthonormée de vecteurs propres $\mathcal{B}_2$, la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$ est nécessairement orthogonale.

La matrice de passage d'une base orthonormée à une base qui est orthogonale sans être orthonormée n'est pas une matrice orthogonale !

♣ Inversement, toute matrice orthogonale peut être considérée comme la matrice de passage d'une base orthonormée à une autre base orthonormée.

En conséquence, traduire le théorème spectral par

$${}^t\text{PAP} = \Delta$$

sous-entend qu'on a représenté un endomorphisme symétrique u par la matrice (symétrique réelle) A dans une certaine base orthonormée et que ce même endomorphisme u est représenté par la matrice diagonale Δ dans une autre base orthonormée.

[46] Il convient d'insister *lourdement* sur le fait que la base $\mathcal{B}$ est orthonormée pour évoquer l'équivalence : u est un endomorphisme symétrique si, et seulement si, sa matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$ est symétrique.

Très lourdement !

[47] Un endomorphisme est **symétrique** si, et seulement si,

$$\forall x, y \in E, \quad \langle u(x) | y \rangle = \langle x | u(y) \rangle.$$

♣ Par symétrie du produit scalaire, la propriété

$$\forall x \in E, \quad \langle u(x) | x \rangle = \langle x | u(x) \rangle$$

est vraie pour *tout* endomorphisme u *sans exception* !

[48] Une fois de plus, $\mathbb{R}^4$ est muni de sa structure euclidienne canonique et la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est donc une base orthonormée.

♣ Considérons un endomorphisme $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ et admettons qu'un des sous-espaces propres de cet endomorphisme symétrique soit l'hyperplan

$$H = [x + 2y - z + t = 0].$$

D'après le Théorème spectral, f est diagonalisable et les sous-espaces propres de u sont deux à deux orthogonaux. Donc u admet exactement deux sous-espaces propres :

$$H \quad \text{et} \quad H^\perp.$$

$$\rightarrow [\text{Ch.18 - 24.4, 24.5}], [\text{Ch.10 - 48}]$$

Pour trouver une base orthonormée de vecteurs propres pour f , il nous reste à trouver une base orthonormée de H et une base orthonormée de $H^\perp$. Du fait que

$$\mathbb{R}^4 = H \oplus H^\perp,$$

on obtiendra une base orthonormée de $\mathbb{R}^4$ en concaténant ces deux familles orthonormées.

♣ L'équation cartésienne de H peut/doit être interprétée de la manière suivante :

$$u = (x, y, z, t) \in H \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0$$

ce qui revient à dire que l'hyperplan H est l'orthogonal du vecteur

$$v_0 = (1, 2, -1, 1)$$

et donc que

$$H^\perp = \mathbb{R} \cdot v_0.$$

Une base orthonormée de la droite $H^\perp$ est donc donnée par

$$w_0 = \frac{1}{\sqrt{7}} \cdot v_0$$

puisque $\|v_0\|^2 = 1^2 + 2^2 + (-1)^2 + 1^2 = 7$.

♣ Choisissons un vecteur non nul simple dans H : le vecteur

$$v_1 = (1, 0, 1, 0)$$

vérifie évidemment l'équation cartésienne de H .

♣ Cherchons maintenant un deuxième vecteur non nul dans H , orthogonal à ce vecteur v_1 . Ce vecteur

$$v_2 = (x, y, z, t)$$

doit être une solution du système suivant.

$$\begin{cases} x + 2y - z + t = 0 \\ x \quad \quad + z = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{équation cartésienne de } H \\ \text{orthogonal à } v_1 \end{array}$$

Le vecteur

$$v_2 = (1, -1, -1, 0)$$

convient.

Il est inutile de résoudre le système, il s'agit seulement d'en trouver une solution non nulle.

♣ Il nous reste à trouver un troisième vecteur pour avoir une base orthogonale de H . Ce vecteur

$$v_3 = (x, y, z, t)$$

doit être une solution du système suivant.

$$\begin{cases} x + 2y - z + t = 0 \\ x \quad \quad + z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{équation cartésienne de } H \\ \text{orthogonal à } v_1 \\ \text{et orthogonal à } v_2 \end{array}$$

Ce système étant triangulaire, on en déduit facilement que

$$v_3 = (1, 2, -1, -6)$$

convient.

C'est en choisissant v_1 et v_2 qu'on a fait le nécessaire pour avoir un système triangulaire !

♣ Il reste à normaliser ces trois vecteurs. Avec

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1, 0) \\ w_2 &= \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, -1, 0) \\ w_3 &= \frac{1}{\sqrt{42}}(1, 2, -1, -6) \end{aligned}$$

la famille (w_1, w_2, w_3) est une base orthonormée de H et la famille

$$(w_0, w_1, w_2, w_3)$$

est une base orthonormée de $\mathbb{R}^4$.

[49.1] Il me semble que le jury a écrit son rapport sans trop réfléchir !

♣ On cherche ici une base orthonormée de vecteurs propres pour un endomorphisme f . C'est donc que f est un endomorphisme symétrique [Ch.18 - 20] et ses sous-espaces propres sont donc deux à deux orthogonaux [Ch.18 - 24.4].

♣ Supposons connue une base de vecteurs propres pour f

$$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_d).$$

On sait [Ch.18 - 27] qu'il existe une base orthonormée de vecteurs propres pour f , mais si on n'a pas fait attention en calculant les e_k , pourquoi cette base $\mathcal{B}$ serait-elle une base orthonormée ?

Si f admet d valeurs propres deux à deux distinctes, les sous-espaces propres sont des droites vectorielles et, dans ce cas, quoi qu'on fasse, les vecteurs propres trouvés sont nécessairement deux à deux orthogonaux !

Il suffit alors de les normaliser pour en déduire une base orthonormée de vecteurs propres.

On pense alors, c'est naturel, à l'algorithme de Gram-Schmidt, qui a pour vocation de transformer une base quelconque en une base orthonormée.

Mais est-on sûr que le résultat de cet algorithme serait encore une base de vecteurs propres de f ?

♣ On a déjà vu [44] que c'était le cas si on avait eu la sagesse de regrouper les vecteurs propres en fonction de la valeur propre à laquelle ils sont associés.

♣ C'est vrai aussi lorsque les vecteurs propres e_k sont en vrac. Je ne vais pas me lancer dans une démonstration, je vais me contenter d'un exemple en dimension 4.

Il est prudent de bien revoir le fonctionnement précis de l'algorithme de Gram-Schmidt avant d'aller plus loin !

▷ Je suppose que e_1 et e_3 sont des vecteurs propres associés à α ; que e_2 et e_4 sont des vecteurs propres associés à β .

▷ On conserve e_1 tel quel.

▷ Comme e_1 et e_2 sont associés à des valeurs propres distinctes, ils sont orthogonaux et e_2 n'est pas modifié par l'algorithme de Gram-Schmidt.

▷ On passe à e_3 . Pour la raison qu'on vient de dire, e_3 est orthogonal à 2 et par conséquent l'algorithme de Gram-Schmidt va remplacer e_3 par un vecteur de la forme $e_3 + t_{3,1} \cdot e_1$ pour un réel $t_{3,1}$ bien choisi.

Quel que soit le scalaire $t_{3,1}$,

$$e_3 + t_{3,1} \cdot e_1 \in \text{Vect}(e_1, e_3)$$

et comme ce vecteur n'est pas nul (propriété garantie par Gram & Schmidt), c'est un vecteur propre associé à α .

▷ On passe enfin à e_4 . Ce vecteur est orthogonal à e_1 et à e_3 , donc l'algorithme de Gram-Schmidt va remplacer e_4 par un vecteur de la forme $e_4 + t_{4,2} \cdot e_2$ et, pour les raisons qu'on vient d'exposer, ce vecteur est encore un vecteur propre associé à β .

▷ On doit se convaincre qu'il en irait de même en dimension plus grande avec un nombre plus de valeurs propres...

[49.2] Méthode déjà vue au [44].

[50] Caractérisations des matrices orthogonales

Une matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si, et seulement si :

- ${}^tMM = I_n$
- les colonnes de M forment une base orthonormée
- $M{}^tM = I_n$
- les lignes de M forment une base orthonormée
- la matrice M est inversible et $M^{-1} = {}^tM$
- c'est la matrice de passage d'une base orthonormée à une autre base orthonormée
- elle représente une isométrie de E , espace euclidien de dimension n , dans une base orthonormée de E

(J'en ai peut-être oublié...)

♣ La première caractérisation nous a servi de définition dans le cours. La seconde caractérisation traduit la première en voyant apparaître le produit scalaire canonique sur l'espace des matrices colonnes.

Les autres caractérisations s'en déduisent de manière plus ou moins laborieuse.

♣ Les deux dernières caractérisations ne sont utiles que si on dispose d'un endomorphisme (réduction d'un endomorphisme symétrique pour l'une, représentation matricielle d'un automorphisme orthogonale pour l'autre).

♣ L'avantage *décisif* de la seconde caractérisation (= celle qui est recommandée par le jury) est qu'elle permet de vérifier par un *calcul mental* qu'une matrice est orthogonale !

Comme le sous-entend le jury, on ne peut pas imaginer pire méthode que de calculer l'inverse de la matrice (par l'algorithme du pivot ? avec toutes ces fractions et ces racines carrées dans les coefficients ?) pour constater à la fin du calcul que l'inverse de M n'est autre que la transposée de M !

[51] Insistons : Si une matrice est orthogonale, alors son déterminant est égal à ± 1 et la réciproque est **fausse**.

► Les matrices suivantes ne sont pas orthogonales (les colonnes ne sont pas toutes unitaires, elles ne sont pas non plus deux à deux orthogonales)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

alors que leurs déterminants sont respectivement égaux à 1 et à -1 .

► Pour une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, le calcul du déterminant est assez compliqué (pour la plupart des matrices orthogonales, les coefficients sont fractionnaires et font apparaître des racines carrées) et ne prouve pas grand chose.

De plus, si $M \in O_3(\mathbb{R})$, il est inutile de calculer le déterminant pour connaître sa valeur, un argument géométrique suffit : pour une matrice orthogonale, le déterminant est égal à $+1$ si, et seulement si, la dimension du sous-espace fixe $\text{Ker}(M - I_3)$ est impaire.

► Le déterminant d'une application linéaire u a aussi une interprétation géométrique qu'il faut connaître. (On suppose dans ce qui suit que $\det u \neq 0$.)

▷ Le signe du déterminant indique si l'application linéaire conserve l'orientation (déterminant positif) ou change l'orientation (déterminant négatif).

▷ Pour interpréter la valeur absolue du déterminant, il faut se donner une base orthonormée

$$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_d)$$

et calculer son image par u :

$$u_*(\mathcal{B}) = (u(e_1), \dots, u(e_d))$$

qui est aussi une base de E puisque $\det u \neq 0$.

Avec la base orthonormée $\mathcal{B}$, on peut définir un carré ($d = 2$), un cube ($d = 3$) ou plus généralement un hypercube ($d \geq 4$) dont l'aire/le volume/l'hypervolume a pour mesure 1.

Avec la base $u_*(\mathcal{B})$, on peut définir un parallélogramme ($d = 2$), un rhomboèdre ($d = 3$) ou plus généralement un hyperrhombôdre ($d \geq 4$) dont l'aire/le volume/l'hypervolume a pour mesure $|\det u|$.

Cette propriété est au fondement de la formule de changement de variables dans les intégrales multiples.

▷ En dimension 3, on retiendra qu'un automorphisme dont le déterminant est égal à ± 1 conserve la mesure des volumes en modifiant éventuellement leur forme et peut donc servir à modéliser l'évolution d'un **fluide incompressible** (forme variable, volume conservé).

Pour sa part, un automorphisme orthogonal conserve la mesure des volumes *parce qu'il* conserve toutes les distances et donc la forme des volumes. Les isométries (et particulièrement les rotations, qui conservent l'orientation) servent à modéliser l'évolution d'un **solide indéformable** (forme invariable, volume conservé).

Ces considérations concrètes doivent vous rappeler que le déterminant d'une isométrie est égale à ± 1 mais que la réciproque est fausse.