Officiel 2020 - Planche 198

Calculer

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (at + b - t\ln t)^2 t^2 \, dt.$$

Exercice très classique !

Position du problème

On indique ici comment il faut interpréter l'exercice — avant même de commencer à répondre aux différentes questions posées.

▶ On considère trois fonctions

$$u = [t \mapsto 1]$$
$$v = [t \mapsto t]$$
$$w = [t \mapsto t\ln t]$$

et on note E, le sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^0(]0,1],\mathbb{R})$ engendré par ces trois fonctions.

$$E = \mathrm{Vect}(u, v, w).$$

▶ On munit cet espace vectoriel E du produit scalaire défini par

$$\forall\, f, g \in E, \quad \langle\, f \,|\, g \,\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\, t^2 \, dt.$$

Il faut impérativement savoir démontrer que $\langle\,\cdot\,|\,\cdot\,\rangle$ est un produit scalaire sur E.

Deux difficultés (modérées) se présentent.

▶ *Les trois fonctions u, v et w sont continues sur $]0,1]$ et tendent vers une limite finie au voisinage de 0. Par conséquent, quelles que soient les fonctions f et g dans E, le produit*

$$\big[t \mapsto f(t).g(t).t^2\big]$$

est une fonction continue sur $]0,1]$ et tend vers une limite finie au voisinage de 0, donc cette fonction est bien intégrable sur $]0,1]$.

▶ *Si $\langle\, f \,|\, f \,\rangle = 0$, alors $[f(t)]^2 = 0$ pour tout $t \in]0,1[$ (car*

$$\big[t \mapsto t^2 f^2(t)\big]$$

est une fonction continue et positive sur l'intervalle $]0,1[$ et que son intégrale est nulle).
Cela prouve que f est bien le vecteur nul de E.

▶ On considère alors le sous-espace

$$F = \mathrm{Vect}(u, v).$$

Quels que soient les réels a et b, la fonction

$$[t \mapsto at + b] = a \cdot u + b \cdot v$$

est un vecteur de F et par conséquent

$$\int_0^1 (at + b - t\ln t)^2 t^2\,dt = \|(a \cdot u + b \cdot v) - w\|^2.$$

▶ On déduit alors du cours **[Ch.17 - 72]** qu'il s'agit ici de calculer (le carré de) la distance du vecteur w au plan F et plus précisément **[Ch.17 - 76.2]** que la borne inférieure cherchée est égale à

$$\langle\, w \,|\, w - p_F(w) \,\rangle$$

où $p_F(w)$ est le projeté orthogonal de w sur le sous-espace F.

1

Calculer

$$\int_0^1 t^n \ln t\,dt \quad \text{puis} \quad \int_0^1 t^n \ln^2 t\,dt$$

pour tout $n \geqslant 2$.

❧ *Ces intégrales existent au sens propres : les intégrandes sont des fonctions continues sur l'intervalle borné* $]0, 1]$ *et tendent vers une limite finie (nulle, en fait !) au voisinage de* 0 *(par croissances comparées des puissances de* t *et des puissances de* $\ln t$*).*

❧ *Comme* $t^{n+1}\ln t$ *et* $t^{n+1}\ln^2 t$ *tendent vers* 0 *lorsque* t *tend vers* 0*, on peut intégrer par parties sur* $]0, 1]$*.*

$$\begin{aligned}
\int_0^1 t^n \ln t\,dt &= \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\ln t\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^n}{n+1}\,dt \\
&= \frac{-1}{(n+1)^2} \\
\int_0^1 t^n \ln^2 t\,dt &= \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\ln^2 t\right]_0^1 - \frac{2}{n+1}\int_0^1 t^n \ln t\,dt \\
&= \frac{2}{(n+1)^3}
\end{aligned}$$

2

Calculer le projeté orthogonal de w sur F.

D'après le cours **[Ch.17 - 47.4]**, *le projeté orthogonal de* w *sur* F *est l'unique vecteur*

$$p(w) \in F \qquad \textit{tel que} \qquad w - p(x) \in F^{\perp}.$$

Notons $p(w)$, *le projeté orthogonal de* w *sur* F.

▶ *Il existe deux réels* a *et* b *tels que*

$$w = a \cdot u + b \cdot v$$

et comme

$$F = \mathrm{Vect}(u, v),$$

le vecteur $w - p(w)$ *est orthogonal à* F *si, et seulement si,* **[Ch.17 - 31.2]**

$$\begin{cases} \langle\, w - p(w) \,|\, u \,\rangle &= 0 \\ \langle\, w - p(w) \,|\, v \,\rangle &= 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} a \langle\, u \,|\, u \,\rangle \ + b \langle\, u \,|\, v \,\rangle &= \langle\, w \,|\, u \,\rangle \\ a \langle\, u \,|\, v \,\rangle \ + \ b \langle\, v \,|\, v \,\rangle &= \langle\, w \,|\, v \,\rangle . \end{cases}$$

▶ *D'après la question précédente,*

$$\begin{aligned} \langle\, u \,|\, u \,\rangle &= 1/3, \\ \langle\, u \,|\, v \,\rangle &= 1/4, \\ \langle\, v \,|\, v \,\rangle &= 1/5, \\ \langle\, w \,|\, u \,\rangle &= -1/16, \\ \langle\, w \,|\, v \,\rangle &= -1/25. \end{aligned}$$

On applique les formules de Cramer et on trouve

$$p(w) = \frac{-3}{5} \cdot u + \frac{11}{20} \cdot v.$$

Pour limiter les risques d'erreur, il est important de donner un nom de vecteur à chaque fonction rencontrée et de repousser le plus possible les calculs numériques.
En se plaçant ainsi dans une forme théorique, on s'abstrait plus facilement des détails sans importance et, comme on sait, un calcul littéral est beaucoup plus facile à simplifier qu'un calcul numérique.

3

Conclure.

D'après le cours, la borne inférieure

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (at + b - t\,\ell n\, t)^2 t^2 \, dt$$

est égale à

$$\big[\, d(w, F) \big]^2$$

et donc à

$$\begin{aligned} \langle\, w \,|\, w - p(w) \,\rangle &= \langle\, w \,|\, w \,\rangle - \big\langle\, w \,\big|\, a \cdot u + b \cdot v \,\big\rangle \\ &= \langle\, w \,|\, w \,\rangle - a \langle\, w \,|\, u \,\rangle - b \langle\, w \,|\, v \,\rangle \\ &= \frac{2}{125} - \frac{-3}{5} \cdot \frac{-1}{16} - \frac{11}{20} \cdot \frac{-1}{25} \\ &= \frac{1}{2\,000}. \end{aligned}$$

Une fois encore, il faut retarder autant que possible les applications numériques et choisir l'expression littérale qui donnera les calculs les plus simples !
Si on ignore la formule **[Ch.17 - 76.2]**, *on va devoir calculer*

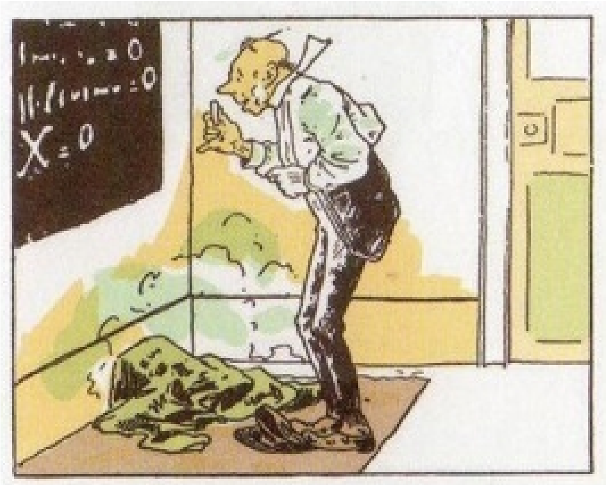
$$\left\|w-(a\cdot u+b\cdot v)\right\|^2.$$

En développant cette expression, on trouve

$$\begin{aligned}\langle w|w\rangle - a\langle w|u\rangle - b\langle v|w\rangle \\ +\big[a^2\|u\|^2 + 2ab\langle u|v\rangle + b^2\|v\|^2 \\ - a\langle w|u\rangle - b\langle w|v\rangle\big]\end{aligned}$$

et les calculs (littéraux !) effectués précédemment nous assurent que la quantité entre crochets est nulle : comme ça ne saute pas aux yeux, il nous faudra donc calculer numériquement cette quantité (avec tous les risques d'erreur que cela comporte : on calcule ici sur des rationnels) pour trouver qu'elle est nulle.

❧ **Note culturelle fort à propos**



À trois heures et demie, le docteur découvre la valeur de x, l'inconnue cherchée ; ce qui lui cause une joie sans mélange. – Nous prions les esprits superficiels de s'abstenir de toute réflexion sur la valeur de x, et de ne point prétendre que Zéphyrin a beaucoup travaillé pour peu de chose.

CHRISTOPHE
L'idée fixe du savant Cosinus