Officiel 2020 - Planche 175

On pose $d_0 = 1$, $d_1 = 1/2$ et

$$d_n = \begin{vmatrix} \frac{n}{n+1} & \frac{1}{\sqrt{n+1}} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{n+1}} & \frac{n-1}{n} & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2/3 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{-1}{\sqrt{3}} & 1/2 \end{vmatrix}$$

pour tout entier $n \geqslant 2$.

1

1.a. Calculer d_2 et d_3.

$$d_2 = \begin{vmatrix} 2/3 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & 1/2 \end{vmatrix} = 1/3$$

Pour calculer d_3, le plus simple est d'appliquer la méthode de Sarrus.

$$d_3 = \begin{vmatrix} 3/4 & \frac{1}{\sqrt{4}} & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{4}} & 2/3 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{3}} & 1/2 \end{vmatrix} = 5/8$$

1.b. Démontrer que

$$\forall\, n \geqslant 2, \quad (n+1)d_n = nd_{n-1} + d_{n-2}. \qquad \text{(R)}$$

On doit remarquer que

$$(n+1)d_n = \sqrt{n+1} \cdot \sqrt{n+1} \cdot d_n.$$

En multipliant la première ligne et la première colonne de la matrice par $\sqrt{n+1}$, on obtient

$$(n+1)d_n = \begin{vmatrix} \boxed{n} & \boxed{1} & & & \\ -1 & \frac{n-1}{n} & \frac{1}{\sqrt{n}} & & \\ & \frac{-1}{\sqrt{n}} & \frac{n-2}{n-1} & \frac{1}{\sqrt{n-1}} & \\ & & \frac{-1}{\sqrt{n-1}} & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \end{vmatrix}$$

et on développe par la première ligne.

On pourrait aussi bien développer par la première colonne. Vérifiez-le !

Le cofacteur de n est évidemment égal à d_{n-1}.

Le cofacteur de 1 *est l'opposé de*

$$\begin{vmatrix} -1 & \frac{1}{\sqrt{n}} & & \\ & \frac{n-2}{n-1} & \frac{1}{\sqrt{n-1}} & \\ & \frac{-1}{\sqrt{n-1}} & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & \end{vmatrix}$$

c'est-à-dire $-(-d_{n-2}) = d_{n-2}$ *(en développant par la première colonne).*
On a démontré la relation de récurrence (R)*.*

Cette méthode s'applique à toutes les matrices dites tri-diagonales*, c'est-à-dire pour lesquelles les coefficients* $a_{i,j}$ *sont nuls dès que* $|i-j| \geqslant 2$*.*

2

2.a. Démontrer que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad 1/2 \leqslant d_n \leqslant 1.$$

La relation de récurrence (R) *peut aussi s'écrire*

$$d_n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) d_{n-1} + \frac{1}{n+1} d_{n-2}$$

ce qu'on peut traduire par : d_n *est une combinaison convexe de* d_{n-1} *et* d_{n-2}*.*
❧ *On en déduit que*

$$\forall\, n \geqslant 2, \quad d_n \in \left]d_{n-1} \leftrightarrow d_{n-2}\right[,$$

donc

$$\forall\, n \geqslant 2, \quad \left]d_{n-1} \leftrightarrow d_n\right[\subset \left]d_{n-2} \leftrightarrow d_{n-1}\right[$$

et par conséquent

$$\forall\, n \geqslant 2, \quad d_n \in \left]d_1 \leftrightarrow d_0\right[= \left]1/2, 1\right[.$$

❧ *Ainsi*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 1/2 \leqslant d_n \leqslant 1.$$

❧ *Le changement de quantificateur impose de transformer les inégalités strictes en inégalités larges.*
❧ *Si on ne voit pas la géométrie cachée dans la relation de récurrence, on peut établir l'encadrement par récurrence, à condition de faire une hypothèse de récurrence "forte" : il faut supposer qu'il existe un rang* $n \geqslant 2$ *tel que*

$$1/2 \leqslant d_{n-2} \leqslant 1 \quad \textit{et} \quad 1/2 \leqslant d_{n-1} \leqslant 1.$$

Vérifiez vous-mêmes !

2.b. En déduire le rayon de convergence R de la série entière $\sum d_n x^{n+1}$.
Pour tout $r > 0$*, on déduit de l'encadrement précédent que*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{2} \cdot r^{n+1} \leqslant d_n r^{n+1} \leqslant r^{n+1}.$$

Comme $\sum r^{n+1}$ est une série de terme général positif qui converge si, et seulement si, $0 \leqslant r < 1$, on en déduit que $\sum d_n r^{n+1}$ converge si, et seulement si, $0 \leqslant r < 1$.
Par conséquent, le rayon de convergence de la série entière $\sum d_n x^{n+1}$ est égal à 1.

Si on était un peu plus savant sur les ordres de grandeur, on traduirait l'encadrement précédent par

$$d_n \underset{n \to +\infty}{=} \Theta(1)$$

pour conclure directement que le rayon de convergence de $\sum d_n x^{n+1}$ est égal au rayon de convergence de $\sum x^{n+1}$.

3

On pose

$$\forall\, x \in \left]-R, R\right[, \quad S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n x^{n+1}. \qquad \text{(E)}$$

$\boxed{\textbf{3.a.}}$ Démontrer que

$$\forall\, x \in \left]-R, R\right[, \quad (1-x)S'(x) - xS(x) = 1.$$

Comme le rayon de convergence est strictement positif, la somme S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1, 1[$ et

$$\forall\, x \in \left]-1, 1\right[, \quad S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) d_n x^n.$$

On a l'habitude d'appliquer ce théorème, certes, mais ce n'est pas une raison pour l'appliquer sans rigueur : il est très important de rappeler que la *condition d'application est satisfaite ($R > 0$) et d'indiquer d'une part que la somme est de classe $\mathscr{C}^1$, d'autre part que sa dérivée peut être calculée en dérivant terme à terme.*

Pour tout $x \in]-1, 1[$, on déduit de la relation de récurrence (R) que

$$\begin{aligned} S'(x) = {} & d_0 + 2d_1 x \\ & + \sum_{n=2}^{+\infty} \left(n d_{n-1} x^n + d_{n-2} x^n \right) \end{aligned}$$

(puisque la relation de récurrence ne s'applique qu'à partir de $n = 2$).
D'après le cours **[Ch.12 - 20 & 24]**, *les rayons de convergence des séries entières*

$$\sum d_n x^{n+1} \qquad \sum n d_{n-1} x^n \qquad \sum d_{n-2} x^n$$

sont égaux.

Les séries

$$\sum n d_{n-1} x^n \quad \textit{et} \quad \sum d_{n-2} x^n$$

convergent donc pour tout $x \in]-1,1[$ *et donc*

$$\begin{aligned}S'(x) &= d_0 + 2d_1 x \\ &\qquad + \sum_{n=2}^{+\infty} n d_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} d_{n-2} x^n\end{aligned}$$

pour tout $x \in]-1,1[$.

Pour invoquer la linéarité de la sommation et, comme on vient de le faire, scinder une somme en deux morceaux, il faut d'abord s'assurer que les deux morceaux sont bien les sommes de séries convergentes. *(La convergence absolue n'est pas nécessaire.)*

On décale les indices dans les deux sommes :

$$\begin{aligned}S'(x) &= d_0 + 2d_1 x \\ &\qquad + x \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) d_n x^n + x \sum_{n=0}^{+\infty} d_n x^{n+1} \\ &= d_0 + 2d_1 x + x\big[S'(x) - d_0\big] + xS(x) \\ &= d_0 + (2d_1 - x_0)x + xS'(x) + xS(x)\end{aligned}$$

et l'équation différentielle (E) *découle alors des valeurs* $d_0 = 1$ *et* $d_1 = 1/2$.

3.b. En déduire que

$$\forall\, x \in]-R,R[, \quad S(x) = \frac{1-e^{-x}}{1-x}.$$

❧ *Une solution non nulle de l'équation homogène vérifie*

$$\forall\, x \in]-1,1[, \quad \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{x}{1-x} = \frac{1}{1-x} - 1.$$

On en déduit qu'une fonction $f \in \mathscr{C}^1(]-1,1[)$ *est solution de l'équation différentielle homogène associée à* (E) *si, et seulement si, il existe une constante* $K \in \mathbb{R}$ *telle que*

$$\forall\, x \in]-1,1[, \quad f(x) = K \cdot \frac{e^{-x}}{1-x}.$$

❧ *Pour résoudre l'équation* (E)*, nous faisons maintenant varier la constante.*
L'expression

$$K(x) \cdot \frac{e^{-x}}{1-x}$$

vérifie l'équation (E) *si, et seulement si,*

$$\forall\, x \in]-1,1[, \quad K'(x) \cdot e^{-x} = 1.$$

Par conséquent, une fonction f *est solution de* (E) *si, et seulement si, il existe une constante* $K_0 \in \mathbb{R}$ *telle que*

$$\forall\, x \in]-1,1[, \quad f(x) = e^x \cdot \frac{e^{-x}}{1-x} + K_0 \cdot \frac{e^{-x}}{1-x}.$$

❧ *L'équation différentielle* (E) *présente une singularité en* $x = 1$ *seulement.*
Par conséquent, le Théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique sur l'intervalle $]-1, 1[$ *et chaque solution* f *est caractérisée par la condition initiale*

$$\big(x = 0,\ f(0)\big).$$

C'est le cas de la fonction S *en particulier.*
❧ *Il faut être soigneux pour déterminer la condition initiale car, dans la définition de* S*, les indices sont décalés :*

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} d_{n-1} x^n.$$

Il n'y a pas de terme constant dans la somme !
❧ *La fonction* S *est une solution de* (E) *et, par définition de* S*,*

$$S(0) = 0$$

donc, pour S*, la constante* K_0 *est égale à* -1 *et*

$$\forall\, x \in\,]-1, 1[, \quad S(x) = \frac{1 - e^{-x}}{1 - x}.$$

3.c. En déduire enfin une expression de d_n.
❧ *La fonction* S *apparaît finalement comme le produit de deux fonctions développables en série entière.*
Pour tout $x \in\,]-1, 1[$*,*

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1-x} \cdot (1 - e^{-x}) \\ &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} 1 \cdot x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \cdot x^n\right). \end{aligned}$$

❧ *On applique alors le Théorème sur le produit de Cauchy* **[Ch.12 - 27]***, en faisant attention au fait que le premier indice de la seconde somme est égal à* 1*.*
On en déduit que

$$\forall\, x \in\,]-1, 1[, \quad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^n$$

avec

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad c_n = 0 \cdot 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \cdot 1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!}.$$

❧ *Par unicité du développement en série entière (le rayon de convergence de notre série est strictement positif), on en déduit que*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad d_n = c_{n+1} = -\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Le fait que d_n *soit une somme partielle d'une série qui vérifie les hypothèses du Critère spécial des séries alternées donne une belle explication à la propriété observée au début de l'exercice :*

$$\forall\, n \geqslant 2, \quad d_n \in\,]d_{n-1} \leftrightarrow d_{n-2}[.$$