Banque CCP [58]

On considère un espace vectoriel E de dimension finie, muni d'une base

$$\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$$

et de la norme produit relative à cette base :

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot e_k \right\|_\infty = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k|.$$

L'espace vectoriel produit $E \times E$ est alors muni de la norme produit naturelle :

$$\forall\, (x, y) \in E, \quad \big\|(x, y)\big\| = \max\big\{\|x\|_\infty,\ \|y\|_\infty\big\}.$$

On doit savoir démontrer vite et bien que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E et que $\|\cdot\|$ est une norme sur $E \times E$.

On considère une forme bilinéaire

$$B\ :\ E \times E \to \mathbb{R}.$$

Il s'agit ici de démontrer par des calculs simples des propriétés générales des applications bilinéaires sur un espace vectoriel produit de dimension finie.

1

Démontrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall\, x, y \in E, \quad \big|B(x, y)\big| \leqslant C\, \|x\|_\infty\, \|y\|_\infty.$$

Il faut voir dans cette propriété une généralisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire :

$$\forall\, x, y \in E, \quad \big|\left\langle\, x \,|\, y \,\right\rangle\big| \leqslant \|x\|_2 \|y\|_2$$

où $\|\cdot\|_2$ est la norme euclidienne associée au produit scalaire $\langle\,\cdot\,|\,\cdot\,\rangle$.

Soient x et y, deux vecteurs de E, qu'on décompose dans la base $\mathscr{B}$:

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot e_k, \qquad y = \sum_{k=1}^{n} y_k \cdot e_k.$$

Par bilinéarité de B,

$$B(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j B(e_i, e_j)$$

et par inégalité triangulaire

$$\big|B(x, y)\big| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |x_i|\, |y_j|\, \big|B(e_i, e_j)\big|.$$

Le maximum étant un majorant,

$$\forall\, 1 \leqslant i, j \leqslant n,$$
$$|x_i|\,|y_j|\,\underbrace{\big|B(e_i, e_j)\big|}_{\geqslant 0} \leqslant \|x\|_\infty\,\|y\|_\infty\,\big|B(e_i, e_j)\big|$$

et, en sommant ces inégalités,

$$\forall\, x, y \in E,$$
$$\big|B(x, y)\big| \leqslant \underbrace{\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\big|B(e_i, e_j)\big|\right]}_{\textit{indépendant de } x \textit{ et } y}\,\|x\|_\infty\,\|y\|_\infty.$$

❧ *La démonstration que nous venons de faire est en tous points analogue à celle du lemme* **[Ch.23 - 35.1]**.

❧ *Si on impose* $\|x\|_\infty \leqslant 1$ *et* $\|y\|_\infty \leqslant 1$*, cette propriété devient*

$$\big|B(x, y)\big| \leqslant C$$

ce qui signifie que l'application B *est bornée sur la boule unité fermée de* $E \times E$*.*

On doit alors rattacher cette remarque à la continuité des applications linéaires. → **[Ch.3 - 43 / Ch.22 - 57]**

Ce rapprochement est plus qu'une analogie, puisqu'on peut déduire de la propriété établie que B *est continue sur* $E \times E$*.* → **[Ch.23 - 18.1]**

❧ *Réciproquement, si on suppose que* B *est bilinéaire et continue, alors elle est bornée sur tout compact*

$$K \subset E \times E.$$

Comme E *est un espace de dimension finie, la sphère unité* S^1 *de* E *est compacte.* → **[Ch.25 - 4]**

Par conséquent le produit $S^1 \times S^1$ *est une partie compacte de* $E \times E$*.* → **[Ch.23 - 13]**

On en déduit qu'il existe une constante $C_0 > 0$ *telle que*

$$\forall\, (u, v) \in S^1 \times S^1, \quad \big|B(u, v)\big| \leqslant C_0.$$

Par homogénéité de la norme, quels que soient x *et* y *différents du vecteur nul,*

$$\left|B\left(\frac{x}{\|x\|_\infty}, \frac{y}{\|y\|_\infty}\right)\right| \leqslant C_0$$

et donc, par bilinéarité de B*,*

$$\big|B(x, y)\big| \leqslant C_0\|x\|_\infty\,\|y\|_\infty,$$

propriété qui est évidemment vraie aussi lorsque x *ou* y *est égal au vecteur nul.*

Démontrer que B est différentiable sur $E \times E$ et donner son application linéaire tangente.

Soient $M_0 = (x_0, y_0)$, un point de $E \times E$ et $\mathbf{h} = (h_x, h_y)$, un vecteur déplacement dans $E \times E$.

❧ *Par définition de l'addition dans un espace produit,*

$$M_0 + \mathbf{h} = (x_0 + h_x,\ y_0 + h_y)$$

et par bilinéarité de B,

$$B(M_0 + \mathbf{h}) = B(M_0) + B(x_0, h_y) + B(h_x, y_0) + B(h_x, h_y). \qquad (\star)$$

❧ *On vérifie sans difficulté que*

$$T_{M_0} = [\mathbf{h} \mapsto B(x_0, h_y) + B(h_x, y_0)]$$

est une forme linéaire *sur E.*

On doit vérifier pour de vrai *cette propriété...*

❧ *D'après la première question et la définition de la norme $\|\cdot\|$ sur $E \times E$,*

$$\left|B(h_x, h_y)\right| \leqslant C \underbrace{\|h_x\|_\infty}_{\leqslant \|\mathbf{h}\|} \underbrace{\|h_y\|_\infty}_{\leqslant \|\mathbf{h}\|} \leqslant C\|\mathbf{h}\|^2.$$

On en déduit que, lorsque $\mathbf{h}$ tend vers $0_{E\times E}$,

$$B(h_x, h_y) = \mathcal{O}(\|\mathbf{h}\|^2) = o(\|\mathbf{h}\|)$$

et la décomposition $(\star)$ devient

$$B(M_0 + \mathbf{h}) = B(M_0) + T_{M_0}(\mathbf{h}) + o(\|\mathbf{h}\|).$$

❧ *Ce développement limité démontre que B est différentiable en chaque point $M_0 \in E \times E$ et que, en ce point $M_0 = (x_0, y_0)$, l'application linéaire tangente à B est l'application*

$$T_{M_0} = [\mathbf{h} \mapsto B(x_0, h_y) + B(h_x, y_0)] .$$

Le corrigé "officiel" insiste lourdement sur la continuité de l'application linéaire tangente.

❧ Dans le cadre du programme, *la différentiabilité n'est définie que pour des fonctions définies sur un ouvert d'une espace de dimension finie. Par conséquent, l'application linéaire tangente est toujours continue (en tant qu'application linéaire définie sur un espace vectoriel de dimension finie) et vous n'avez pas à vous occuper de cette question pour le moment.*

❧ *Pour une fonction f définie sur un ouvert d'un espace vectoriel de dimension infinie, il est essentiel d'exiger que l'application linéaire tangente soit continue.*

En effet, si elle n'était pas continue, le développement limité à l'ordre 1

$$f(M_0 + \mathbf{h}) \underset{\mathbf{h}\to 0}{=} f(M_0) + \ df(M_0)(\mathbf{h}) + o(\mathbf{h})$$

ne prouverait pas que f soit continue au point M_0 et perdrait, de ce fait, tout intérêt !