[61] Si le rang de la matrice A est égal à 1, alors la dimension de

$$\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker}(A - 0.I_d)$$

est égale à $(d-1) \geqslant 1$.
❧ Or **[37.1]** pour toute valeur propre λ,

$$1 \leqslant \dim \operatorname{Ker}(A - \lambda.I_d) \leqslant m_\lambda \leqslant d$$

et **[Ch.10 - 74.3]** si le polynôme caractéristique de A est scindé,

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} m_\lambda = d.$$

Comme χ_A est un polynôme de degré d et que 0 est une racine dont la multiplicité est au moins égale à $(d-1)$, le polynôme caractéristique est scindé :

$$\chi_A = X^{d-1}(X - \lambda_0).$$

❧ L'alternative est donc simple :
– ou bien $\lambda_0 = 0$, donc
$$\chi_A = X^d.$$
Dans ce cas, le spectre de A est réduit à 0 et comme
$$\dim \operatorname{Ker} A = d - 1 < d = m_0,$$
la matrice A n'est pas diagonalisable (elle est nilpotente) ;
– ou bien $\lambda_0 \neq 0$ et la multiplicité de λ_0 est égale à 1, donc
$$\dim \operatorname{Ker} A = d - 1, \qquad \dim \operatorname{Ker}(A - \lambda_0.I_d) = 1$$
et la matrice A est diagonalisable :
$$\mathfrak{M}_{d,1}(\mathbb{R}) = \underbrace{\operatorname{Ker} A}_{\text{hyperplan}} \oplus \underbrace{\operatorname{Ker}(A - \lambda_0.I_d)}_{\text{droite}}.$$
En particulier,
$$\operatorname{tr} A = 0 \times (d-1) + \lambda_0 \times 1 = \lambda_0.$$

[62] Par définition, la matrice de $f \in L(E)$ relative à la base

$$\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_d)$$

est définie par

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f(e_1), \dots, f(e_d)\big).$$

Cela doit conduire à lire la matrice de f *colonne par colonne*.

► **Exemple** — S'il existe une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ dans laquelle l'endomorphisme f est représenté par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

alors nécessairement

$$\begin{cases} f(e_1) = & 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 = e_1 & C_1 \\ f(e_2) = & 0 \cdot e_1 + 2 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 = 2 \cdot e_2 & C_2 \\ f(e_3) = & (-1) \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 2 \cdot e_3 = 2 \cdot e_3 - e_1 & C_3 \end{cases}$$

et en particulier les vecteurs e_1 et e_2 doivent être des vecteurs propres de f associés respectivement à 1 et 2.

Exemple typique d'analyse à savoir mener en algèbre linéaire.

[63] Le déterminant d'une matrice diagonale par blocs ou triangulaire par blocs est le produit des déterminants des blocs diagonaux.

Théorème à savoir et à appliquer (en le citant proprement).

▶ En revanche, si une matrice écrite par blocs n'est pas triangulaire, il n'y a pas de formule pour calculer le déterminant et il faut donc *résister* au désir d'appliquer une telle formule...
❧ Un erreur classique consiste à croire que

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A).\det(D) - \det(B).\det(C)$$

(ou n'importe quelle formule approchante : elles sont toutes fausses).
Il est facile de trouver un contre-exemple :

$$\det\begin{pmatrix} I_2 & I_2 \\ I_2 & -I_2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2I_2 & I_2 \\ 0_2 & -I_2 \end{pmatrix}$$

et en appliquant la règle du déterminant pour les matrices triangulaires par blocs, on trouve que ce déterminant est égal à 4 (et non pas à 0).

[64] Une matrice $A \in \mathfrak{M}_d(\mathbb{K})$ possède un polynôme minimal (unique !), un polynôme caractéristique (unique !) et une *infinité* de polynômes annulateurs (tous les multiples du polynôme minimal).

▶ La donnée d'une relation de liaison de la forme

$$A^3 + A^2 - 6A = (A - 2I_d)(A + 3I_d)A = 0_d$$

doit être interprétée de la manière suivante.
❧ Le polynôme

$$P_1 = X^3 + X^2 - 6X$$

est <u>un</u> polynôme annulateur (unitaire) de A.
❧ Le polynôme minimal de A est un diviseur unitaire de P_1 dont le degré est au moins égal à 1. Les candidats sont donc :

$$\begin{gathered} X, \qquad X-2, \qquad X+3, \\ X(X-2), \quad (X-2)(X+3), \quad (X+3)X, \\ X(X-2)(X+3). \end{gathered}$$

❧ Le polynôme caractéristique est un polynôme unitaire de degré d dont les diviseurs irréductibles sont ceux du polynôme minimal. Il est donc de la forme

$$X^a(X-2)^b(X+3)^c$$

où a, b et c sont des entiers (éventuellement nuls si les racines de P_1 ne sont pas toutes des valeurs propres de A) tels que

$$a + b + c = d.$$

[65] Dans le cours, il n'existe qu'un seul cas où la connaissance du polynôme caractéristique permette de démontrer que la matrice est diagonalisable : lorsque le polynôme caractéristique est scindé <u>et à racines simples</u>. (Dans ce cas, les sous-espaces propres sont tous des droites vectorielles.)

▶ La connaissance d'un polynôme annulateur scindé n'est pas négligeable : elle équivaut au fait que la matrice soit <u>trigonalisable</u> **[Ch.10 - 147]**.

Mais si on commence à confondre ***dia****gonalisable et* ***tri****gonalisable, rien ne va plus !*

[66] Il n'y a qu'une seule raison valable de calculer le polynôme caractéristique : on cherche les valeurs propres d'une matrice et on n'a pas trouvé d'autre moyen plus simple...

Comme les valeurs propres de la matrice sont les racines du polynôme caractéristique, il est crucial d'obtenir le polynôme caractéristique **sous forme factorisée**.

La factorisation d'un polynôme est un des problèmes les plus difficiles qui soient en mathématiques...

En conséquence, calculer le polynôme caractéristique sous forme développée en se disant qu'on le factorisera plus tard témoigne d'une grande naïveté.

[67] Version matricielle de l'alinéa **[35]**.

[68] Revoir à nouveau les deux figures du **[Ch.17 - 76]**. On sait qu'on a tout compris quand on est capable de faire les figures (avec leur légende) en sachant indiquer le sens précis de chaque élément des figures (et en sachant placer le vecteur nul de l'espace sur la figure).