Rapport CCINP PSI (Analyse & proba.)

[69] Les opérations permises sans restriction sur les équivalents sont les produits et les quotients. Ainsi, si $u_n \sim a_n$ et si $v_n \sim b_n$, alors
$$u_n.v_n \sim a_n.b_n \quad \text{et} \quad \frac{u_n}{v_n} \sim \frac{a_n}{b_n}.$$

❧ *D'autres opérations sont possibles, à la condition de savoir précisément ce qu'on fait : l'addition et la composition.*
❧ *D'une manière générale, la méthode sûre pour manipuler des équivalents consiste à les traduire sous la forme de développements limités et d'effectuer les calculs sur les développements limités.*

Les risques d'erreur sont alors réduits au minimum.

▶ Addition d'équivalents

Avant d'ajouter des équivalents, il faut savoir très précisément ce que signifie l'équivalence. On rappelle donc que
$$u_n \sim a_n \qquad \iff \qquad u_n = a_n + o(a_n).$$

▷ Supposons que u_n et v_n soient du même ordre de grandeur :
$$u_n \sim \lambda.a_n \quad \text{et} \quad v_n \sim \mu.a_n.$$

❧ Si $\lambda + \mu \neq 0$, alors $u_n + v_n \sim (\lambda + \mu).a_n$.
❧ Si $\lambda+\mu = 0$, alors $u_n+v_n = o(a_n)$ et, sans information supplémentaire, on ne pourra pas en déduire un équivalent de (u_n+v_n).

▷ Supposons que u_n et v_n soient d'ordres de grandeur différents :
$$u_n \sim a_n, \quad v_n \sim b_n \quad \text{et} \quad b_n = o(a_n).$$

Dans ce cas, $u_n + v_n = a_n + o(a_n) \sim a_n$.

Comment agacer à coup sûr un correcteur ? Simple ! Il suffit d'écrire
$$\cos x \underset{x\to 0}{\sim} 1 - \frac{x^2}{2}.$$

Cette comparaison n'est pas fausse : le quotient tend bien vers 1, certes... Mais cette comparaison indique surtout que son auteur n'a rien compris à la notion d'équivalent.
❧ *Une équivalence $f(x) \sim g(x)$ signifie que la **fonction étudiée** $f(x)$ est du même ordre de grandeur qu'une **fonction de référence** $g(x)$.*

*Ainsi, bien que $\sim$ soit une relation symétrique (et même une relation d'équivalence), la comparaison $f(x) \sim g(x)$ doit être lue de gauche à droite exclusivement et l'expression de droite, c'est-à-dire la **fonction de référence** doit être aussi simple que possible — sinon ce n'est pas une fonction de référence !*
❧ *Pour revenir à l'exemple de $\cos x$, on pourrait aussi écrire*
$$\cos x \underset{x\to 0}{\sim} 1 + \frac{x}{2}.$$

Pour bizarre que cette comparaison paraisse, elle est tout à faite juste et tout autant stupide.

La seule bonne comparaison est
$$\cos x \underset{x\to 0}{\sim} 1.$$

❧ *Si on tient à être plus précis, il faut écrire*
$$\cos x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-x^2}{2}$$

mais il est alors bien plus simple d'écrire le développement limité à l'ordre 2 :
$$\cos x \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

► **Composition d'équivalents**

Parfois, la composition d'équivalents revient en fait à composer des limites.

La composition des limites étant une des propriétés fondamentales de la Topologie, la composition d'équivalents est alors légitime.

▷ On sait que

$$\ln(1+x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x.$$

Cette relation est une simple réécriture de la propriété suivante.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

❧ On peut donc substituer à la variable x le terme général de n'importe quelle suite de limite nulle (puisqu'on s'intéresse ici au cas $x \to 0$).

En particulier,

$$\forall\, \alpha > 0, \quad \ln\Big(1 + \frac{1}{n^\alpha}\Big) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^\alpha}$$

ou encore

$$\forall\, 0 < r < 1, \quad \ln(1+r^n) \underset{n\to+\infty}{\sim} r^n.$$

❧ En revanche, il serait hasardeux de substituer à la variable x (qui tend vers 0) le terme général d'une suite qui ne tend pas 0...

Qu'on en juge avec

$$\frac{n-1}{n} \sim 1 \quad vs \quad \ln\Big(1 + \frac{n-1}{n}\Big) \sim \ln 2$$

(le second équivalent découle de la continuité de $\ln$) ou avec

$$\frac{n^3+1}{n+1} \sim n^2 \quad vs \quad \ln\Big(1 + \frac{n^3+1}{n+1}\Big) \sim 2\ln n$$

puisque

$$\begin{aligned}\ln\big(n^2 + o(n^2)\big) &= \ln(n^2) + \ln\Big(1 + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big)\\ &= 2\ln n + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big).\end{aligned}$$

▷ Les propriétés précédentes sont de la forme

$$f(x) \sim g(x) \quad \Longrightarrow \quad f(u_n) \sim g(u_n)$$

et sont justifiées par le bon sens (on ne compose pas des limites n'importe comment).

La propriété suivante est de la forme

$$u_n \sim v_n \quad \Longrightarrow \quad f(u_n) \sim f(v_n)$$

et est *très* utile.

Quel que soit $\alpha \in \mathbb{R}$, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites de réels strictement positifs, alors

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \quad \Longrightarrow \quad u_n^\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n^\alpha.$$

Démo. — *Quel que soit $\alpha \in \mathbb{R}$, si u_n et v_n sont strictement positifs et si $u_n \sim v_n$, alors*

$$\frac{u_n^\alpha}{v_n^\alpha} = \Big(\frac{u_n}{v_n}\Big)^\alpha \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

car $\lim_{x\to 1} x^\alpha = 1$.

▶ **Équivalents et constantes multiplicatives**

Contrairement à o et $\mathcal{O}$, qui absorbent les constantes et les signes, la relation $\sim$ impose de conserver les constantes et les signes.

Ainsi, lorsque x tend vers $+\infty$,

$$f(x) = \frac{4x+1}{2} \sim 2x \quad g(x) = \frac{x^2+1}{2x+3} \sim \frac{x}{2} \quad h(x) = \frac{1-x^2}{2+x} \sim -x$$

et les expressions $f(x)$, $g(x)$ et $h(x)$ ne sont pas équivalentes, bien que

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathcal{O}(x), \quad g(x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathcal{O}(x), \quad h(x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathcal{O}(x).$$

[70]

Il importe de connaître aussi bien les différences de forme *que les* différences d'usage *entre ces trois notions.*

▶ Une **série entière** est une série de fonctions, sa somme est une *fonction* d'une *variable* réelle ou complexe.

Cette somme compte une *infinité de termes* et est *définie sur un intervalle* ouvert $]-R, R[$ ou sur un disque ouvert (au moins).

▶ Un **développement limité** donne une *approximation* de fonction.

Cette approximation est composée d'une fonction polynomiale, avec un *nombre fini de termes*, et d'un *reste*, qui indique la qualité de l'approximation.

En général, cette approximation n'a de sens qu'au voisinage d'un point puisqu'un développement limité s'exprime en fonction d'un *infiniment petit de référence*.

▶ Un **polynôme** est un *objet formel* qui s'exprime comme une somme d'un *nombre fini de termes* à l'aide d'une *indéterminée*.

On peut former de nombreuses expressions polynomiales en substituant divers objets mathématiques concrets à l'indéterminée.

On peut en particulier substituer une variable réelle ou complexe à cette indéterminée et définir une *fonction polynomiale*. Selon le type de variable choisie, cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$ tout entier.

Les sommes partielles d'une série entière et la partie régulière d'un développement limité sont des fonctions polynomiales.

Si on est tenté de confondre les trois notions, c'est qu'on n'a pas bien compris leurs significations respectives, ni les manières de s'en servir...

[71] En général, il est facile de vérifier qu'une série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur un intervalle I. La somme S de la série est alors définie par

$$\forall\, t \in I, \quad S(t) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} S_n(t).$$

Cela signifie que

$$\forall\, t \in I, \quad \lim_{n\to+\infty} \left|S(t) - S_n(t)\right| = 0$$

mais cela ne signifie pas que

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{t\in I} \left|S(t) - S_n(t)\right| = 0$$

pour la simple raison que, *avant* de se prononcer sur la limite pour $n \to +\infty$, il faudrait déjà étudier

$$\sup_{t\in I} \left|S(t) - S_n(t)\right|$$

c'est-à-dire trouver un majorant de $|S(t) - S_n(t)|$ qui ne dépende pas de $t \in I$. $\longrightarrow$ **[12]**

On pourrait dire à ce sujet que la convergence simple est une convergence universelle *(pour tout* $t \in I$*) mais a priori pas une* convergence uniforme *(pour tout* $t \in I$ *avec la même vitesse de convergence).*

[72] Revoir **[18]** et **[19]**.

[73] Cf par exemple **[175.II]** dans l'Officiel 2020.

[74] Considérons une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie en deux temps : une expression algébrique simple sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ et une valeur particulière $f(0,0) = a$ à l'origine.

▶ Pour étudier la continuité de f en $(0,0)$, il faut comparer

$$f(x,y) \quad \text{à} \quad f(0,0)$$

pour (x,y) proche de $(0,0)$.

❧ Une méthode classique (très utile, même si elle ne couvre pas 100% des besoins) consiste à munir $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne canonique et à utiliser les coordonnées polaires pour faire les calculs.

Il s'agit alors **[Ch.24 - 12]** de majorer la valeur absolue de la variation de f :

$$\big|f(r\cos\theta,\ r\sin\theta) - f(0,0)\big|$$

par une expression $\varphi(r)$, indépendante de θ, qui tend vers 0 lorsque $r = \|(x,y)\|_2$ tend vers 0.

▶ Il ne s'agit en aucun cas de faire tendre x et y vers 0 séparément.

Comparer $f(x,0)$ et $f(0,y)$ à $f(0,0)$ consiste en fait à étudier f sur le diamètre horizontal et le diamètre vertical d'un disque

$$[x^2 + y^2 \leqslant r^2]$$

au lieu d'étudier f sur la totalité de ce disque.

Cette confusion précédente est facile à faire !

❧ En supposant que f est continue sur $\mathbb{R}^2$ privé de l'origine, la propriété

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = f(0,0)$$

signifie seulement

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = f(0,0)$$

car $\lim_{y\to 0} f(x,y) = f(x,0)$ par continuité de f au point $(x,0) \neq O$.

❧ De même, la propriété

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = f(0,0)$$

signifie seulement

$$\lim_{y\to 0} f(x,0) = f(0,0)$$

❧ Enfin, la signification de la propriété

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = f(0,0)$$

est incertaine : s'agit-il de

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = f(0,0)$$

ou s'agit-il de

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = f(0,0),$$

on n'en sait rien... En tout cas, ça ne signifie aucunement

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0).$$

► **Un contre-exemple**
La fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(0,0) = 0$ et par

$$\forall\,(x,y) \neq (0,0), \quad f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

est évidemment de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ privé de l'origine (c'est une fonction rationnelle dont l'unique pôle est l'origine).

Cette fonction vérifie bien

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{y\to 0} f(0,y) = 0.$$

Mais, en coordonnées polaires,

$$f(x,y) = \frac{r\cos\theta \cdot r\sin\theta}{r^2} = \sin\theta\cos\theta.$$

Cette expression varie avec θ mais ne dépend pas de r, c'est tout l'inverse de ce qu'il nous faut pour établir la continuité à l'origine !

[75.1] L'égalité est absurde ! Le membre de gauche est une constante (la valeur moyenne de X) tandis que le membre de droite est une variable aléatoire, mal définie qui plus est, puisque la somme n'a même pas de bornes...

Rappelons que, si X est une variable aléatoire d'espérance finie à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors la série $\sum k\,\mathbf{P}(X=k)$ est absolument convergente et

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X=k).$$

[75.2] Par définition des probabilités conditionnelles, si l'événement $[Y=n]$ n'est pas négligeable, alors

$$\mathbf{P}(X=k \mid Y=n) = \frac{\mathbf{P}\big([X=k]\cap[Y=n]\big)}{\mathbf{P}(Y=n)}.$$

❧ D'autre part, si Y est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors

$$\big([Y=n]\big)_{n\in\mathbb{N}}$$

est un système complet d'événements et

$$\mathbf{P}(X=k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}\big([X=k]\cap[Y=n]\big).$$

Cette égalité permet de déduire la loi marginale de X de la loi du couple (X,Y).

→ ***[Ch.15 - 10]***

❧ Si $\mathbf{P}(Y=n) > 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, alors on peut réécrire cette décomposition de $\mathbf{P}(X=k)$ sous la forme

$$\mathbf{P}(X=k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X=k \mid Y=n)\ \mathbf{P}(Y=n).$$

On peut convenir que cette écriture est encore valable lorsque certains des événements $[Y=n]$ sont négligeables puisque, dans ce cas :

$$[X=k]\cap[Y=n] \subset [Y=n]$$

et donc

$$\mathbf{P}([X=k]\cap[Y=n]) = 0.$$

Il faut alors convenir que le produit d'une probabilité conditionnelle non définie par une probabilité nulle est égale à 0 – c'est ce qu'indique le bon sens.