Séries numériques (A) - mai 2020

On doit apprendre à utiliser plusieurs versions du théorème de comparaison sur les séries.

▶ ***Première version : comparaison par domination***

Soient $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$*, deux séries de termes généraux positifs. Si*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant v_n \tag{1}$$

et si la série $\sum v_n$ *est convergente, alors la série* $\sum u_n$ *est convergente.*

▶ Variantes

❧ *Il suffit que la comparaison* (1) *soit vérifiée à partir d'un certain rang* $N_0 \in \mathbb{N}$ *pour que la conclusion soit vraie.*

❧ *Si* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *sont deux séries dont les termes généraux sont des réels de signe quelconque ou même des complexes ; si*

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(v_n) \tag{2}$$

et si la série $\sum v_n$ *est* absolument *convergente, alors la série* $\sum u_n$ *est absolument convergente (et donc convergente).*

❧ *La comparaison* $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ *équivaut à* $|u_n| = \mathcal{O}(|v_n|)$ *et se traduit par le fait qu'il existe une constante* $K > 0$ *telle que*

$$|u_n| \leqslant K.|v_n|$$

pour tout n *assez grand. Cette variante se déduit donc de la première version en remplaçant* u_n *par* $|u_n|$ *et* v_n *par* $K.|v_n|$.

❧ *Si* $u_n = o(v_n)$ *ou si* $u_n \sim v_n$*, alors la comparaison* (2) *est aussi vérifiée et le Théorème de comparaison s'applique de la même manière.*

▶ *Deux points sont essentiels à retenir sur ce théorème.*

❧ *Le principe est de comparer le terme général de la* série étudiée $\sum u_n$ *au terme général d'une* série de référence $\sum v_n$.

❧ *Pour que le théorème puisse s'appliquer, la série de référence doit être* absolument convergente.

Lorsque les conditions d'application du théorème sont satisfaites, la série étudiée est absolument convergente.

Ce théorème ne peut donc pas s'appliquer pour démontrer qu'une série est semi-convergente (c'est-à-dire convergente mais pas absolument convergente).

▶ ***Deuxième version : comparaison par équivalence***

Si $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *sont deux séries de terme général positif et si*

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \tag{3}$$

alors les séries $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *sont de même nature.*

❧ *Ce théorème est l'un des rares qui permettent de démontrer que la série étudiée $\sum u_n$ est divergente (lorsque la série $\sum v_n$ est une série divergente de terme général positif).*
❧ *Évidemment, ce théorème s'applique aussi aux séries dont le terme général est négatif.*
La condition d'application essentielle pour obtenir la conclusion (les deux séries sont de même nature) est que la série de référence $\sum v_n$ soit une série de signe constant.
En effet, si $\sum v_n$ est une série de signe constant, la comparaison (3) implique que la série étudiée $\sum u_n$ est elle aussi de signe constant (éventuellement à partir d'un certain rang).

► Variante
On peut s'affranchir de la condition sur le signe, au prix d'un affaiblissement de la conclusion.

Si $u_n \sim v_n$, alors la série $\sum u_n$ est absolument convergente si, et seulement si, la série $\sum v_n$ est absolument convergente.

Comme on le voit, l'alternative n'est plus convergente/divergente mais absolument convergente/non absolument convergente.
On doit absolument savoir qu'il existe des séries convergentes qui ne sont pas absolument convergentes ! Pour de telles séries, le théorème de comparaison par équivalence est inapplicable.

1

Quand on applique le théorème de comparaison, on compare

✔ les termes généraux

❏ les sommes partielles

❏ les restes

❏ les sommes

❧ *Bien que la convergence d'une série soit, par définition, la convergence de la suite des sommes partielles, l'étude d'une série est en général l'étude de son terme général et non pas l'étude de ses sommes partielles.*
❧ *Le théorème de comparaison a pour but d'établir la nature d'une série, donc on ne sait pas si la série converge au moment d'appliquer le théorème. Il est donc absurde de comparer les restes pour prouver la convergence d'une série.*
❧ *S'il est intéressant de comparer les restes de deux séries convergentes (il s'agit de comparer leurs vitesses de convergence respectives), on ne voit pas l'intérêt de comparer leurs sommes (qui sont des nombres et non pas des infiniment petits).*

2

Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

❍ Vrai ● Faux

Le théorème de comparaison par équivalence s'applique aux séries de terme général positif et, par extension, aux séries dont le terme général est de signe constant à partir d'un certain rang.

3

Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et si $u_n \leqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

● Vrai ❍ Faux

Comme les u_n sont négatifs et que $v_n \sim u_n$, on sait que les v_n sont négatifs à partir d'un certain rang. Par conséquent, la série de référence $\sum v_n$ est une série dont le terme général est négatif (au moins à partir d'un certain rang) et le théorème de comparaison par équivalence s'applique.

4

Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et si

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant 0 \quad \text{et} \quad v_n \geqslant 0,$$

alors

$$\sum_{n=0}^{N} u_n \underset{N\to+\infty}{\sim} \sum_{n=0}^{N} v_n.$$

❍ Vrai ● Faux

Le théorème de comparaison par équivalence permet, lorsque les conditions d'application sont remplies, de comparer les natures *de deux séries.*
Prétendre que les sommes partielles sont équivalentes sous-entend qu'elles ont même limite, c'est-à-dire que les deux séries ont même somme : le théorème de comparaison ne dit rien de tel.

5

Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et si les u_n et les v_n sont tous de même signe, alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature

● Vrai ❍ Faux

et de plus

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

❍ Vrai ● Faux

❧ *Le théorème de comparaison par équivalence s'applique et permet de conclure que les séries sont de même nature.*
❧ *La notion d'*équivalence *n'a de sens que pour des quantités dépendant d'un paramètre : suites et fonctions. La somme d'une série (convergente !) n'est ni une suite, ni une fonction, c'est un* nombre. *Une telle comparaison est donc absurde.*

6

Si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ et si la série $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge.

❍ Vrai ● Faux

Pour appliquer le théorème de comparaison avec $\mathcal{O}$, la série de référence $\sum v_n$ doit être une série de terme général positif ou, par extension, une série absolument convergente.
Les conditions d'application du théorème ne sont donc pas remplies ici.

7

Si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$, si $v_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et si $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge.

● Vrai ❍ Faux

La série $\sum u_n$ est même absolument convergente.

✔ Oui

❏ Non, bien qu'elle soit convergente

❏ Non, puisqu'elle n'est pas convergente

Comme $\sum v_n$ est une série convergente de terme général positif, les conditions d'application du théorème de comparaison avec $\mathcal{O}$ sont remplies.
La relation de comparaison signifie aussi

$$|u_n| = \mathcal{O}(v_n)$$

et le théorème de comparaison nous assure alors que la série de terme général positif $\sum |u_n|$ est convergente.
Cela prouve que $\sum u_n$ est absolument convergente et donc qu'elle est convergente.

8

Si $u_n = o(v_n)$, si $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et si $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge.

❍ Vrai ● Faux

La série $\sum u_n$ est même absolument convergente.

❏ Oui

❏ Non, bien qu'elle soit convergente

✔ Non, puisqu'elle n'est pas convergente

❧ Peu importe que la série étudiée $\sum u_n$ soit de terme général positif, pour appliquer le théorème de comparaison avec $\mathcal{O}$ (ou comme ici avec o), c'est la série de référence $\sum v_n$ qui doit être une série de terme général positif ou, à défaut, une série absolument convergente.
A priori, la série $\sum u_n$ est donc divergente.
❧ Si une série réelle ou complexe est absolument convergente, elle est nécessairement convergente. Donc, a priori encore, la série $\sum u_n$ n'est pas absolument convergente.

9

Si la série $\sum u_n$ converge et si $u_n \leqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors la série $\sum u_n$ converge absolument.

● Vrai ❍ Faux

Si $\sum u_n$ est une série de terme général négatif, alors les séries $\sum(-u_n)$ et $\sum|u_n|$ sont exactement les mêmes !
Par linéarité, les séries $\sum u_n$ et $\sum(-u_n)$ sont de même nature.
Par conséquent, la série $\sum u_n$ converge si, et seulement si, la série $\sum|u_n|$ converge.

10

Si la série $\sum u_n$ diverge et si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors la série $\sum v_n$ diverge.

❍ Vrai ● Faux

La série $\sum v_n$ n'est pas absolument convergente.

❏ Bien sûr, puisqu'elle diverge !

✔ Oui, même si elle converge !

❏ Mais non, puisqu'elle converge !

❧ Pour appliquer le théorème de comparaison par équivalence, il faut que la série de référence soit de signe constant. Rien n'indique que cette condition d'application soit remplie...
❧ Comme la série $\sum u_n$ est divergente, elle ne peut pas être absolument convergente.
La comparaison qui est donnée nous assure aussi que

$$|v_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} |u_n|$$

où $\sum|u_n|$ est une série divergente de terme général positif. Par comparaison, la série $\sum|v_n|$ est donc divergente.
On peut donc conclure que la série $\sum v_n$ n'est pas absolument convergente, qu'elle soit convergente ou pas.

11

S'il existe une constante $K > 0$ et si

$$u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{K}{n^\alpha},$$

alors la série $\sum u_n$ diverge si, et seulement si,

✔ $\alpha \leqslant 1$

❏ $\alpha < 1$

❏ $\alpha > 1$

❏ $\alpha \geqslant 1$

La série de Riemann $\sum 1/n^\alpha$ est une série de terme général positif et elle converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.
D'après le théorème de comparaison par équivalence pour les séries de terme général positif, la série $\sum u_n$ est convergente si, et seulement si, $\alpha > 1$.

12

S'il existe $r > 0$ et $K > 0$ tels que

$$u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} K.r^n,$$

alors la série $\sum u_n$ converge si, et seulement si,

❏ $r > 1$

❏ $r \geqslant 1$

✔ $r < 1$

❏ $r \leqslant 1$

Comme $r > 0$, la série géométrique $\sum r^n$ est une série de terme général positif qui converge si, et seulement si, $r < 1$.
D'après le théorème de comparaison par équivalence pour les séries de terme général positif, la série $\sum u_n$ est convergente si, et seulement si, $r < 1$.

13

Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(1/n^\alpha)$, alors la série $\sum u_n$ converge absolument

- ✔ pour tout $\alpha > 1$
- ❏ pour tout $\alpha \geqslant 1$
- ❏ pour tout $\alpha < 1$
- ❏ pour tout $\alpha \leqslant 1$

La comparaison proposée par l'énoncé nous dit aussi que

$$|u_n| \underset{n\to+\infty}{=} o(1/n^\alpha).$$

La série de Riemann $\sum 1/n^\alpha$ est une série de terme général positif et converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.
❧ D'après le théorème de comparaison en o, si $\alpha > 1$, alors la série $\sum |u_n|$ est convergente et la série $\sum u_n$ est donc convergente (puisque la convergence absolue implique la convergence).
❧ En revanche, si $\alpha \geqslant 1$, la série de référence diverge et la relation de comparaison ne permet pas de conclure (comparaison avec o et non pas $\sim$). La nature de la série $\sum u_n$ reste alors indéterminée.

14

S'il existe $r > 0$ tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(r^n)$, alors la série $\sum u_n$ converge absolument

- ✔ pour tout $r < 1$
- ❏ pour tout $r > 1$
- ❏ si, et seulement si, $r < 1$
- ❏ si, et seulement si, $r > 1$

La comparaison proposée dit aussi que

$$|u_n| \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(r^n).$$

Si $0 < r < 1$, alors la série géométrique $\sum r^n$ est une série convergente de terme général positif.
❧ D'après le théorème de comparaison en $\mathcal{O}$, la série de terme général positif $\sum |u_n|$ est convergente et la série $\sum u_n$ est donc absolument convergente.
❧ Pour $r \geqslant 1$, la série de référence $\sum r^n$ est divergente, mais la relation de comparaison ne permet pas de conclure (comparaison avec $\mathcal{O}$ et non pas $\sim$). Dans ce cas, la nature de la série $\sum u_n$ reste indéterminée.