Intégrales - mai 2020

Les questions indexées par des numéros différents sont indépendantes.

1.

On suppose que

$$f(t) \underset{t\to+\infty}{=} o(1/t^2).$$

La fonction f est

- ❏ intégrable au voisinage de $+\infty$
- ❏ intégrable sur $[1, +\infty[$
- ❏ intégrable sur $]0, +\infty[$
- ✔ Aucune de ces réponses

On ne sait pas si la fonction f est continue par morceaux...

Cela dit, l'ordre de grandeur est compatible avec l'intégrabilité au voisinage de $+\infty$.

2.

On calcule l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^3 e^{-t^2}\,dt$$

- ❏ par intégration par parties
- ❏ par changement de variable
- ✔ d'une autre manière
- ❏ Je ne sais pas la calculer
- ❏ Elle n'existe pas, car la fonction n'est pas intégrable

L'intégrande est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
Comme

$$t^3 e^{-t^2} = \underbrace{\left(t^3 e^{-t^2/2}\right)}_{\xrightarrow[t\to\pm\infty]{} 0} \cdot e^{-t^2/2} \underset{t\to\pm\infty}{=} o\left(e^{-t^2/2}\right)$$

et que la fonction

$$\left[t \mapsto e^{-t^2/2}\right]$$

est intégrable au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$, l'intégrande est bien une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$. Comme il s'agit d'une fonction impaire et que l'intervalle $]-\infty, +\infty[$ est symétrique, l'intégrale est nulle.

Si on cherche les primitives *de cette fonctions, la meilleure méthode consiste à changer de variable ($u = t^2$) avant d'intégrer par parties. On trouve*

$$\int t^3 e^{-t^2}\,dt \equiv \frac{-(1+t^2)}{2}\, e^{-t^2}.$$

3.

La fonction définie par

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \exp(-\cos t)$$

est intégrable sur l'intervalle

✔ $[0, 1]$

✔ $[-\pi, \pi]$

❏ $[0, +\infty[$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, donc intégrable sur chaque segment (et même sur chaque intervalle borné). Comme elle est périodique et qu'elle n'est pas identiquement nulle, elle n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$.

4.

$\boxed{\textbf{4.a.}}$ La fonction définie par

$$f(t) = \frac{1}{t^2} e^{-1/t}$$

est intégrable sur

✔ $]0, 1]$

✔ $[1, +\infty[$

✔ $]0, +\infty[$

❏ Aucun de ces intervalles.

La fonction f est continue sur $]0, +\infty[$.
Par composition de limites,

$$f(t) = \underbrace{e^{-1/t}}_{\xrightarrow[t\to+\infty]{} 1} \cdot \frac{1}{t^2} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$$

donc f est intégrable au voisinage de $+\infty$.
Par croissances comparées et composition de limites,

$$f(t) = \exp\Big(\underbrace{\frac{-1}{t} - 2\,\ell n\, t}_{\xrightarrow[t\to 0]{} -\infty}\Big) \xrightarrow[t\to 0]{} 0$$

donc f est intégrable au voisinage de 0.
La fonction f est donc intégrable sur $]0, +\infty[$ ainsi que sur chaque sous-intervalle de $]0, +\infty[$.

4.b. On calcule ses primitives

❏ en intégrant par parties

✔ avec le changement de variable $u = 1/t$

❏ avec le changement de variable $u = 1/t^2$

❏ Aucune idée !

La fonction est égale à

$$\varphi'(t) \cdot e^{\varphi(t)}$$

avec $\varphi(t) = {}^{-1}/_{t}$.
Une de ses primitives est donc

$$\exp[\varphi(t)] = e^{-1/t}$$

et les autres s'en déduisent par l'addition d'une constante sur chaque intervalle (une constante sur $]-\infty, 0[$*, une constante sur* $]0, +\infty[$*).*

5.

5.a. La fonction f définie par

$$f(t) = \frac{\sin t}{t}$$

est intégrable sur l'intervalle

✔ $]0, \pi]$

❏ $[\pi, +\infty[$

❏ $[0, +\infty[$

❏ Aucun de ces intervalles

La fonction f *est continue sur* $]0, +\infty[$ *et tend vers une limite finie (égale à* 1*) au voisinage de* 0*. Elle est donc intégrable sur tout segment*

$$[a, b] \subset]0, +\infty[$$

mais aussi sur tout intervalle

$$]0, A] \subset]0, +\infty[.$$

En revanche, cette fonction n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$*.*

La démonstration de cette propriété n'est pas simple.
On peut également démontrer que l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$$

est convergente, ce qui fait que cette fonction est un exemple de référence *(qui doit donc être parfaitement connu).*

5.b. On calcule les primitives de f

- ❑ en intégrant par parties
- ❑ en changeant de variable
- ❑ d'une autre manière
- ✔ On ne sait pas les calculer.

Cette fonction est aussi un exemple de référence dans la famille des fonctions continues dont les primitives ne peuvent pas s'exprimer à l'aide des fonctions usuelles.

En tant que fonction continue sur l'intervalle $]0, +\infty[$, la fonction f admet des primitives : c'est une conséquence du Théorème fondamental.
Mais le Théorème fondamental nous dit seulement que les primitives de f peuvent s'exprimer à l'aide d'une intégrale, il ne nous dit pas si ces intégrales peuvent s'exprimer à l'aide des fonctions usuelles.
Ce dernier problème est résolu par un théorème attribué à Liouville, vous trouverez des détails à l'endroit habituel.

Wikipédia
Théorème_de_Liouville_(algèbre_différentielle)

6.

6.a. La fonction f définie par

$$f(t) = \cos 3t.e^{-2t}$$

est intégrable sur l'intervalle

- ✔ $[0, \pi]$
- ✔ $[\pi, +\infty[$
- ✔ $[0, +\infty[$
- ❑ Aucun de ces intervalles

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, donc elle est intégrable sur tout segment

$$[a, b] \subset]-\infty, +\infty[.$$

De plus,

$$f(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathcal{O}(e^{-2t})$$

et la fonction $\left[t \mapsto e^{-2t}\right]$ est intégrable au voisinage de $+\infty$, donc f est intégrable au voisinage de $+\infty$ et par conséquent, intégrable sur tout intervalle de la forme

$$[a, +\infty[\quad ou \quad]a, +\infty[$$

avec $a \in \mathbb{R}$.

La fonction f n'est pas intégrable au voisinage de $-\infty$ et si cette propriété est facile à deviner, elle n'est pas immédiate à démontrer.
En calculant les primitives de f, on constate en effet que

$$\int_x^0 f(t)\,dt$$

n'a pas de limite lorsque x tend vers $-\infty$, ce qui prouve que l'intégrale généralisée

$$\int_{-\infty}^0 f(t)\,dt$$

diverge et en particulier que f n'est pas intégrable au voisinage de $-\infty$.

6.b. On calcule les primitives de f

- ✔ en intégrant par parties
- ❏ en changeant de variable
- ✔ d'une autre manière
- ❏ On ne sait pas les calculer.

Pour calculer les primitives de f, on a le choix entre une double intégration par parties ou un détour par les complexes (sans intégration par parties ni changement de variable) puisque

$$f(t) = \mathfrak{Re}\big[e^{(-2+3i)t}\big].$$

Le choix de la méthode est avant tout une affaire de goût (j'ai une préférence pour le calcul avec les complexes).
On trouve

$$\int f(t)\,dt \equiv \frac{3\sin 3t - 2\cos 3t}{13} \cdot e^{-2t}$$

(le signe $\equiv$ rappelant qu'il s'agit d'une égalité à une constante additive près).

7.

$\boxed{\textbf{7.a.}}$ La fonction f définie par

$$f(t) = t^2 e^{-t^3}$$

est intégrable sur l'intervalle

✔ $]0, +\infty[$

✔ $[1, +\infty[$

❏ $]-\infty, +\infty[$

❏ Aucun de ces intervalles

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.
Elle tend vers $+\infty$ au voisinage de $-\infty$, donc elle n'est pas intégrable au voisinage de $-\infty$.
Au voisinage de $+\infty$, par croissances comparées,

$$f(t) = \exp\big(\underbrace{2\ln t + t - t^3}_{\to -\infty}\big) \cdot \exp(-t)$$
$$\underset{t\to+\infty}{=} o(e^{-t})$$

donc f est bien intégrable au voisinage de $+\infty$.
La fonction f est donc intégrable sur tout segment

$$[a, b] \subset \mathbb{R}$$

ainsi que sur tout intervalle

$$]a, +\infty[\quad \textit{ou} \quad [a, +\infty[$$

avec $a \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\textbf{7.b.}}$ On calcule les primitives de f

❏ en intégrant par parties

✔ avec le changement de variable $u = t^3$

❏ avec le changement de variable $u = t^2$

❏ d'une autre manière

❏ On ne sait pas les calculer.

On doit voir que

$$f(t) = \frac{-1}{3} \cdot \varphi'(t) \cdot \exp[\varphi(t)]$$

avec $\varphi(t) = -t^3$. Les primitives de f sont donc égales à

$$\frac{-1}{3} \exp(-t^3)$$

à une constante additive près.

8.

8.a. La fonction f définie par

$$f(t) = \frac{\sin t}{1+\sin^2 t}$$

est intégrable sur l'intervalle

- ✔ $[0, \pi]$
- ✔ $[-\pi, \pi]$
- ❏ $]-\infty, +\infty[$
- ❏ Aucun de ces intervalles

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, donc elle est intégrable sur tout segment

$$[a, b] \subset \mathbb{R}.$$

Elle est périodique et non identiquement nulle, donc elle n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$.

8.b. On calcule l'intégrale

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin t}{1+\sin^2 t}\, dt$$

avec le changement de variable

- ❏ $u = \sin t$
- ❏ $u = \cos t$
- ❏ $u = \tan t$
- ✔ On la calcule sans changer de variable, voyons !
- ❏ On ne la calcule pas, elle n'est pas définie...

La fonction est intégrable et impaire sur un intervalle symétrique, donc l'intégrale est nulle.

Attention, si la fonction n'était pas intégrable, on ne pourrait pas conclure à la nullité de l'intégrale. Par exemple, l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t}{1+\sin^2 t}\, dt$$

n'est pas nulle, elle n'a pas de valeur !

9.

Soit f, une fonction continue de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

9.a. On suppose que

$$f(t) \sim \frac{1}{t}$$

pour t voisin de 0 et pour t voisin de $+\infty$.
La fonction f est alors intégrable

- ❏ au voisinage de 0, mais pas au voisinage de $+\infty$
- ✔ ni au voisinage de 0, ni au voisinage de $+\infty$
- ❏ au voisinage de $+\infty$, mais pas au voisinage de 0
- ❏ sur $]0, +\infty[$
- ❏ C'est plus compliqué...

La fonction $[t \mapsto 1/t]$ n'est intégrable ni au voisinage de 0, ni au voisinage de $+\infty$.
D'après le théorème de comparaison par équivalence, la fonction f n'est intégrable ni au voisinage de 0, ni au voisinage de $+\infty$.

9.b. On suppose que

$$f(t) = o(1/t)$$

pour t voisin de 0 et pour t voisin de $+\infty$.
La fonction f est alors intégrable

- ❏ Au voisinage de 0, mais pas au voisinage de $+\infty$
- ❏ Ni au voisinage de 0, ni au voisinage de $+\infty$
- ❏ Au voisinage de $+\infty$, mais pas au voisinage de 0
- ❏ sur $]0, +\infty[$
- ✔ C'est plus compliqué...

Contrairement au théorème de comparaison par $\sim$ appliqué à la question précédente, le théorème de comparaison par o ou par $\mathcal{O}$ ne permet pas de conclure lorsque la fonction de référence n'est pas intégrable.

10.

$\boxed{\textbf{10.a.}}$ La fonction f définie par

$$f(t) = \frac{\tan t}{1+\cos^2 t}$$

est intégrable sur l'intervalle

✔ $[0, 1]$

❏ $]0, \pi[$

✔ $[-1, 1]$

❏ Aucun de ces intervalles

❧ *La fonction* $\tan$, *et donc la fonction* f, *est continue sur l'intervalle ouvert*

$$I =]-\pi/2, \pi/2[$$

donc f *est intégrable sur chaque segment*

$$[a, b] \subset]-\pi/2, \pi/2[\,.$$

❧ *Elle n'est pas intégrable sur* $]0, \pi[$, *car elle tend vers* $+\infty$ *au voisinage de* $\pi/2$ *et n'est donc même pas continue par morceaux sur cet intervalle.*

$\boxed{\textbf{10.b.}}$ Pour calculer

$$\int_0^1 f(t)\, dt,$$

j'effectue le changement de variable

❏ $u = \sin t$

✔ $u = \cos t$

✔ $u = \tan t$

❏ un autre changement de variable

❏ Non, je m'y prends autrement.

On peut aussi bien écrire

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{\sin t}{\cos t\,(1+\cos^2 t)} \\ &= \frac{-\varphi'(t)}{\varphi(t)\cdot\big(1+[\varphi(t)]^2\big)} \end{aligned}$$

et poser $u = \varphi(t) = \cos t$ *qu'écrire*

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{\tan t}{1+\frac{1}{1+\tan^2 t}} = \frac{\tan t}{2+\tan^2 t}\cdot\frac{1}{1+\tan^2 t} \\ &= \frac{\psi(t)}{2+[\psi(t)]^2}\cdot\psi'(t) \end{aligned}$$

et poser $v = \psi(t) = \tan t$.
Le deuxième changement de variable donne le résultat un peu plus rapidement et permet d'éviter une décomposition en éléments simples.
On obtient

$$\int f(t)\, dt \equiv \frac{1}{2}\ell n(2+\tan^2 t) = \frac{1}{2}\ell n\,\frac{1+\cos^2 t}{\cos^2 t}.$$

$\boxed{\textbf{10.c.}}$ Pour calculer

$$\int_{-1}^{1} f(t)\,dt,$$

❏ j'effectue le même changement de variable

✔ je m'y prends autrement

Une fois encore, on intègre une fonction continue et impaire sur un segment symétrique, donc l'intégrale est nulle : inutile de calculer une primitive !

11.

$\boxed{\textbf{11.a.}}$ La fonction f définie par

$$f(t) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} t$$

est intégrable sur l'intervalle

✔ $[0, 1]$

❏ $[0, +\infty[$

✔ $[-1, 1]$

❏ Aucun de ces intervalles

❧ *La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, donc intégrable sur chaque segment*

$$[a, b] \subset \mathbb{R}.$$

❧ *On doit connaître la relation trigonométrique :*

$$\forall\, t > 0, \quad f(t) = \operatorname{Arctan} {}^1\!/_t$$

qui nous donne

$$f(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} {}^1\!/_t$$

et qui prouve donc que f n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$.

$\boxed{\textbf{11.b.}}$ Pour calculer

$$\int_a^b f(t)\,dt$$

lorsque cette intégrale est définie,

✔ j'intègre par parties

❏ je change de variable

✔ je m'y prends autrement

❧ *Sur un segment quelconque, on intègre par parties pour trouver*

$$\int \operatorname{Arctan} t\,dt \equiv t \operatorname{Arctan} t - \frac{1}{2}\ln(1+t^2).$$

❧ *Sur un segment symétrique par rapport à l'origine, il est inutile de calculer une primitive :*

$$\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = (2a)\frac{\pi}{2} - \int_{-a}^{a} \operatorname{Arctan} t\,dt = a\pi$$

puisque la fonction Arctan est intégrable sur $[-a, a]$ et impaire.