Séries numériques (B) - mai 2020

Mes commentaires font allusion au Théorème de comparaison par domination et au Théorème de comparaison par équivalence : les deux énoncés sont précisés et commentés dans le QCM "Séries numériques (A)".
Lorsque j'évoque le Théorème de comparaison sans préciser, je sous-entends que les deux formes du théorème peuvent s'appliquer.

1

Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(1/n)$, alors la série $\sum u_n$

❏ converge
❏ diverge
❏ converge absolument
✔ Joker ! Forme indéterminée !

Comme la série $\sum 1/n$ est divergente, le théorème de comparaison par domination ne peut pas s'appliquer.

2

Si $n^2 u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, alors la série $\sum u_n$

❏ converge
❏ diverge
❏ converge absolument
✔ Joker ! Forme indéterminée !

La limite nous indique que

$$\frac{1}{n^2} = o(u_n).$$

La comparaison est faite dans le "mauvais sens" : on a comparé une série de référence à la série étudiée au lieu de comparer la série étudiée $\sum u_n$ à une série de référence.
On ne peut donc pas appliquer le Théorème de comparaison et la nature de $\sum u_n$ reste indéterminée.
❧ Insistons sur cette conclusion : l'hypothèse faite ici sur u_n est vérifiée aussi bien pour

$$u_n = \frac{1}{n} \quad \textit{que pour} \quad u_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

et la série harmonique $\sum 1/n$ diverge tandis que la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge.

3

Si la série $\sum u_n$ converge absolument, alors

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(1/n^2).$$

❍ Vrai ● Faux

❧ Le Théorème de comparaison par domination suppose une relation de comparaison et en déduit une propriété de convergence.
Au contraire le sujet suppose une propriété de convergence et prétend en déduire une relation de comparaison. Cette fois encore, on est donc hors du domaine d'application du théorème de comparaison !
❧ Pour prouver que l'implication est fausse, il nous suffit de proposer un contre-exemple.
La série de Riemann

$$\sum \frac{1}{n^{3/2}}$$

est absolument convergente ($3/2 > 1$) et pourtant

$$\frac{1}{n^{3/2}} \neq \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

4

La série $\sum 1/n$

- ❏ converge absolument
- ❏ converge
- ✔ diverge

La série harmonique est divergente (série de référence).

5

La série $\sum 1/n^2$

- ✔ converge absolument
- ✔ converge
- ❏ diverge

La série de Riemann $\sum 1/n^2$ est convergente et comme c'est une série de terme général positif, elle est aussi absolument convergente (série de référence).

6

La série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge absolument.

❍ Vrai ● Faux

Pour tout $n \geqslant 1$,

$$\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n}$$

et la série harmonique $\sum 1/n$ est une série divergente de terme général positif, donc la série étudiée n'est pas absolument convergente.

Cette série est malgré tout convergente, c'est une conséquence du Critère spécial des séries alternées.

7

La série $\sum \frac{\cos n}{n^2}$

✔ converge absolument

✔ converge

❏ diverge

Lorsque n tend vers $+\infty$,

$$u_n = \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big).$$

Comme la série de Riemann $\sum 1/n^2$ est une série convergente de terme général positif, on déduit du théorème de comparaison par domination que la série $\sum u_n$ est absolument convergente (et par conséquent convergente).

On peut aussi justifier l'application du théorème de comparaison par domination en écrivant

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad |u_n| \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

Il est essentiel dans ce cas de considérer $|u_n|$ et non pas u_n : une majoration ne suffit pas, il faut encadre le terme général.

8

La série

$$\sum \frac{n^2+1}{n+3}$$

❏ converge absolument

❏ converge

✔ diverge

Lorsque n tend vers $+\infty$,

$$u_n \sim n$$

donc la série $\sum u_n$ est (grossièrement) divergente.

9

La série
$$\sum \frac{n^3 + 3\cos n}{1 + 3n^2 + n^5}$$

- ✔ converge absolument
- ✔ converge
- ❏ diverge

Lorsque n tend vers $+\infty$,

$$u_n \sim \frac{n^3}{n^5} = \frac{1}{n^2}.$$

Comme la série de Riemann $\sum {}^1\!/_{n^2}$ est convergente de terme général positif, on déduit du théorème de comparaison que la série $\sum u_n$ est absolument convergente et donc convergente.

10

La série
$$\sum \frac{x^n}{1 + x^{2n}}$$

converge absolument

- ✔ pour tout $0 < x < 1$
- ✔ pour tout $x > 1$
- ❏ pour tout $x > 0$
- ❏ pour aucune de ces valeurs de x !

❧ *Pour $0 < x < 1$, la suite $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 et donc*

$$u_n \sim \frac{x^n}{1} = x^n.$$

Comme la série géométrique $\sum x^n$ est une série convergente de terme général positif, on déduit du théorème de comparaison que $\sum u_n$ est absolument convergente.
❧ *Pour $x > 1$, la suite $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ et donc*

$$u_n \sim \frac{x^n}{x^{2n}} = ({}^1\!/_x)^n.$$

Comme $0 < {}^1\!/_x < 1$, la série géométrique $\sum (1/x)^n$ est une série convergente de terme général positif et on déduit du théorème de comparaison que $\sum u_n$ est absolument convergente.
❧ *Pour $x = 1$, en revanche, le terme général est égal à ${}^1\!/_2$, donc la série $\sum u_n$ est grossièrement divergente.*

11

La série
$$\sum \frac{1+x^n+x^{2n}}{1+x^n}$$
converge absolument

❏ pour tout $0 < x < 1$

❏ pour tout $x > 1$

❏ pour tout $x > 0$

✔ pour aucune de ces valeurs de x !

Pour $0 < x < 1$, le terme général tend vers 1 (puisque le numérateur et le dénominateur tendent vers 1).
Pour $x = 1$, le terme général est identiquement égal à $3/2$.
Pour $x > 1$, le terme général tend vers $+\infty$, car il est équivalent à $x^{2n}/x^n = x^n$.
Bref, quel que soit $x > 0$, la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

12

La série
$$\sum \operatorname{Arctan} \frac{1}{n}$$
converge.

❍ Vrai ● Faux

Sachant que $\operatorname{Arctan} x \underset{x \to 0}{\sim} x$, on déduit que
$$u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$
Or la série harmonique $\sum 1/n$ est une série divergente de terme général positif, donc la série $\sum u_n$ est divergente (théorème de comparaison par équivalence).

En général, on n'a pas le droit de composer des équivalents... mais ici, c'est possible parce qu'en fait, on compose des limites (et composer des limites est toujours *possible).*
En effet,
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad et \quad \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{Arctan} x}{x} = 1$$
donc
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(1/n)}{1/n} = 1.$$
Il s'agit bien ici d'une composition de limites !

13

La série $\sum \operatorname{ch} \frac{1}{2^n}$ converge.

❍ Vrai ● Faux

Comme
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} = 0 \quad et\ que \quad \lim_{x \to 0} \operatorname{ch} x = 1,$$
alors le terme général tend vers 1 (nouvelle composition de limites), donc la série diverge grossièrement.

14

La série $\sum \operatorname{sh} \frac{1}{2^n}$ converge.

● Vrai ❍ Faux

Sachant que $\operatorname{sh} x \underset{x \to 0}{\sim} x$*, on déduit que*

$$u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2^n} = (1/2)^n.$$

Comme $0 < 1/2 < 1$*, la série géométrique* $\sum (1/2)^n$ *est une série convergente de terme général positif, donc la série* $\sum u_n$ *est absolument convergente et donc convergente.*

Comme plus haut, il s'agit d'une composition de limites même si ça ressemble à une composition d'équivalents.

15

La série $\sum \cos 3n.e^{-2n}$ converge.

● Vrai ❍ Faux

Comme la fonction $\cos$ *est bornée sur* $\mathbb{R}$*,*

$$u_n = \mathcal{O}(e^{-2n}) = \mathcal{O}\big((e^{-2})^n\big).$$

Or $0 < e^{-2} < 1$*, donc la série géométrique* $\sum (e^{-2})^n$ *est une série convergente de terme général positif.*
D'après le théorème de comparaison par domination, la série $\sum u_n$ *est absolument convergente et donc convergente.*

16

La série

$$\sum \frac{1}{n^2} e^{-1/n}$$

est convergente.

● Vrai ❍ Faux

Comme

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \textit{et que} \quad \lim_{x \to 0} e^x = 1,$$

alors $e^{-1/n}$ *tend vers* 1 *lorsque* n *tend vers* $+\infty$ *(par composition de limites, encore et toujours), donc*

$$u_n \sim \frac{1}{n^2}.$$

Or la série de Riemann $\sum 1/n^2$ *est une série convergente de terme général positif, donc la série* $\sum u_n$ *est absolument convergente et donc convergente.*

17

La série $\sum e^{-\sqrt{n}}$ est convergente.

● Vrai ❍ Faux

Par croissances comparées de $\sqrt{n}$ et de $\ln n$,

$$n^2.e^{-\sqrt{n}} = \exp\big(2\ln n - \sqrt{n}\big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Cela signifie que

$$u_n = o\Big(\frac{1}{n^2}\Big).$$

Comme la série de Riemann $\sum 1/n^2$ est une série convergente de terme général positif, la série $\sum u_n$ est absolument convergente et donc convergente.

Attention, cette série n'est pas une série géométrique et de plus

$$\forall\, 0 < r < 1, \quad r^n = o(e^{-\sqrt{n}}).$$

C'est pour cette raison que nous l'avons comparée à une série de Riemann...

18

La série

$$\sum \frac{2^n + 3^n}{3^n + 2.5^n}$$

converge.

● Vrai ❍ Faux

Lorsque n tend vers $+\infty$,

$$u_n \sim \frac{3^n}{2.5^n} = \frac{1}{2}\cdot(3/5)^n.$$

Comme $0 < 3/5 < 1$, la série géométrique $\sum (3/5)^n$ est une série convergente de terme général positif. D'après le théorème de comparaison, la série $\sum u_n$ est absolument convergente et donc convergente.

19

La série
$$\sum \frac{x^n}{n^2}$$
converge

- ❏ pour tout $x \in \mathbb{R}$
- ❏ si, et seulement si, $-1 < x < 1$
- ✔ si, et seulement si, $-1 \leqslant x \leqslant 1$
- ❏ Aucune réponse n'est correcte

❧ *Pour* $|x| \leqslant 1$ *(y compris pour* $x = \pm 1$*), on a*
$$\forall\, n \geqslant 1, \quad 0 \leqslant |u_n| \leqslant \frac{1}{n^2}.$$
Or la série de Riemann $\sum 1/n^2$ *est une série convergente, donc la série* $\sum |u_n|$ *est convergente (théorème de comparaison par domination), ce qui prouve que la série* $\sum u_n$ *converge.*
❧ *Pour* $|x| > 1$*, par croissances comparées de* x^n *et de* n^2*, le terme général tend vers l'infini et la série* $\sum u_n$ *diverge grossièrement.*

20

La série
$$\sum \frac{x^n}{n!}$$
converge

- ✔ pour tout $x \in \mathbb{R}$
- ❏ si, et seulement si, $-1 < x < 1$
- ❏ si, et seulement si, $-1 \leqslant x \leqslant 1$
- ❏ Aucune réponse n'est correcte

Pour tout $x \in \mathbb{R}$*, par croissances comparées de* $n!$ *et des suites géométriques,*
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{(2x)^n}{n!} = 0$$
donc
$$u_n = o\left(\frac{1}{2^n}\right) = o\left((1/2)^n\right).$$
Comme $0 < 1/2 < 1$*, la série géométrique* $\sum (1/2)^n$ *est une série convergente de terme général positif et d'après le théorème de comparaison, la série* $\sum u_n$ *est absolument convergente et donc convergente.*

21

La série
$$\sum n^2.x^n$$
converge

❏ pour tout $x \in \mathbb{R}$

✔ si, et seulement si, $-1 < x < 1$

❏ si, et seulement si, $-1 \leqslant x \leqslant 1$

❏ Aucune réponse n'est correcte

❧ Considérons $|x| < 1$.
Par croissances comparées de n^4 et de x^n,
$$\lim_{n\to+\infty} n^4 x^n = 0$$
donc
$$u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$
Or la série de Riemann $\sum {}^1/_{n^2}$ est une série convergente de terme général positif, donc la série $\sum u_n$ est absolument convergente et donc convergente.
❧ Pour $|x| \geqslant 1$, le terme général $n^2.x^n$ tend vers l'infini lorsque n tend vers $+\infty$, donc la série $\sum u_n$ est grossièrement divergente.

22

Pour tout $n \geqslant 1$, on pose
$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$
On **admet** que la série $\sum u_n$ est convergente.

22.a. La série $\sum u_n$ est absolument convergente.

❍ Vrai ● Faux

Pour tout $n \geqslant 1$,
$$|u_n| = \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{1/2}}.$$
La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{1/2}}$ est une série divergente, donc la série $\sum u_n$ n'est pas absolument convergente, bien qu'elle soit convergente.

*Une série convergente qui n'est pas absolument convergente est dite **semi-convergente**.*

$\boxed{\textbf{22.b.}}$ Si $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$, alors la série $\sum v_n$

❏ converge absolument

❏ converge

❏ diverge

✔ Joker ! Forme indéterminée !

*Comme $\sum u_n$ n'est pas une série dont le terme général est de signe constant (c'est même une **série alternée**), on ne peut pas appliquer le théorème de comparaison par équivalence.*
Comme $\sum u_n$ n'est pas absolument convergente, on ne peut pas non plus appliquer la variante du théorème de comparaison par équivalence.
La nature de la série $\sum v_n$ reste alors indéterminée.

$\boxed{\textbf{22.c.}}$ On suppose que

$$v_n \underset{n\to+\infty}{=} u_n + o(1/n).$$

Dans ce cas, la série $\sum v_n$

❏ converge absolument

❏ converge

❏ diverge

✔ Joker ! Forme indéterminée !

Comme la série harmonique $\sum 1/n$ est divergente, le théorème de comparaison par domination ne peut pas s'appliquer à la série de terme général

$$v_n - u_n = o(1/n).$$

La nature de la série $\sum(v_n - u_n)$ reste donc indéterminée et il en va donc de même pour la série

$$\sum v_n = \sum u_n + \sum(v_n - u_n).$$

22.d. On suppose que

$$v_n \underset{n\to+\infty}{=} u_n + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n\sqrt{n}}\Big).$$

Dans ce cas, la série $\sum v_n$

❏ converge absolument

✔ converge

❏ diverge

❏ Joker ! Forme indéterminée !

❧ *La série de Riemann*

$$\sum \frac{1}{n\sqrt{n}} = \sum \frac{1}{n^{3/2}}$$

est une série convergente de terme général positif.
D'après le théorème de comparaison par domination, la série de terme général

$$v_n - u_n = \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n\sqrt{n}}\Big)$$

est donc absolument convergente et donc convergente.
En tant que différence de deux séries convergentes, la série

$$\sum v_n = \sum u_n - \sum (u_n - v_n)$$

est donc convergente.
❧ *Cela étant, si $\sum v_n$ était absolument convergente, alors la série*

$$\sum u_n = \sum v_n + \sum (u_n - v_n)$$

serait absolument convergente (en tant que somme de deux séries absolument convergentes) et on a vu plus haut que ce n'était pas le cas.
Donc la série $\sum v_n$ n'est pas absolument convergente.

22.e. On suppose que

$$v_n \underset{n\to+\infty}{=} u_n + \frac{1}{n} + o(1/n).$$

Dans ce cas, la série $\sum v_n$

❏ converge absolument

❏ converge

✔ diverge

❏ Joker ! Forme indéterminée !

❧ *Si la série $\sum v_n$ était convergente, alors la série*

$$\sum (v_n - u_n)$$

serait convergente en tant que différence de deux séries convergentes.

❧ *On suppose ici que*

$$v_n - u_n = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}.$$

Or la série harmonique $\sum 1/n$ est une série divergente de terme général positif, donc la série $\sum (v_n - u_n)$ est divergente (théorème de comparaison par équivalence).

❧ *Par conséquent, la série $\sum v_n$ est divergente.*

22.f. On suppose que

$$v_n \underset{n\to+\infty}{=} u_n + \frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Dans ce cas, la série $\sum v_n$

❏ converge absolument

❏ converge

✔ diverge

❏ Joker ! Forme indéterminée !

Comme

$$\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) = o\left(\frac{1}{n}\right),$$

les hypothèses de la question précédente sont encore vérifiées et la conclusion est donc la même.

22.g. On suppose que

$$v_n \underset{n\to+\infty}{=} u_n + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big).$$

Dans ce cas, la série $\sum v_n$

❑ converge absolument

✔ converge

❑ diverge

❑ Joker ! Forme indéterminée !

❧ *Comme la série de Riemann $\sum {}^1\!/\!_{n^2}$ est une série convergente de terme général positif et que*

$$v_n - u_n = \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big),$$

on déduit du théorème de comparaison par domination que la série

$$\sum (v_n - u_n)$$

est absolument convergente et donc convergente.
❧ *En tant que différence de deux séries convergentes, la série*

$$\sum v_n = \sum u_n - \sum (u_n - v_n)$$

est donc convergente.
❧ *Si $\sum v_n$ était absolument convergente, alors la série*

$$\sum u_n = \sum (u_n - v_n) + \sum v_n$$

serait absolument convergente (en tant que somme de deux séries absolument convergentes), ce qui est faux. Donc la série $\sum v_n$ n'est pas absolument convergente.