Déterminants — mai 2020

Les questions indexées par des numéros différents sont indépendantes.

1

Si une matrice n'est pas inversible, alors son déterminant est nul.

❍ Vrai ❍ Faux

2

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

2.a. $\det(-A) = -\det(A)$

❍ Vrai ❍ Faux

2.b. La matrice A est inversible si, et seulement si, $\det A \neq 0$.

❍ Vrai ❍ Faux

2.c. Le déterminant de A est égal au produit de ses coefficients diagonaux.

❍ Vrai ❍ Faux

2.d. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

❏ $\det(\lambda A) = \det A$

❏ $\det(\lambda A) = \lambda \det A$

❏ $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$

❏ Aucune de ces formules n'est vraie.

2.e. Pour toute matrice inversible $P \in GL_n(\mathbb{K})$,

$$\det(PA) = \det(AP).$$

❏ Oui

❏ Oui, mais seulement si A et P commutent

❏ Oui, même si P n'est pas inversible

❏ Euh... faut voir...

2.f. Si A est à coefficients réels, alors

$$\det({}^tAA) \geqslant 0.$$

❍ Vrai ❍ Faux

2.g. Si les coefficients de A sont tous des réels positifs, alors $\det A$ est un réel positif.

❍ Vrai ❍ Faux

2.h. Si les coefficients de A sont des fonctions polynomiales de x, alors $\det A$ est une fonction polynomiale de x.

❍ Vrai ❍ Faux

3

Soient A et B, deux matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

3.a. Si $\det A = 2$ et $\det B = 3$, alors $\det(A+B)$

❏ est égal à 5

❏ n'est pas nul

❏ On n'en sait rien !

3.b. Si $\det A = 2$ et $\det B = -2$, alors $\det(AB)$

❏ est égal à -4

❏ est nul

❏ On n'en sait rien !

3.c. Si $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B$, alors $\det A = \det B$.

❍ Vrai ❍ Faux

3.d. Si A et B sont semblables, alors

$$\det A = \det B.$$

❍ Vrai ❍ Faux

3.e. Si A et B sont équivalentes, alors

$$\det A = \det B.$$

❍ Vrai ❍ Faux

3.f. Si $\det A = \det B$, alors les matrices A et B sont semblables.

❍ Vrai ❍ Faux

Ces deux matrices

❏ sont équivalentes parce que semblables

❏ sont équivalentes quoiqu'elles ne soient pas semblables

❏ n'ont aucune raison d'être équivalentes

3.g. S'il existe deux matrices inversibles

$$P, Q \in GL_n(\mathbb{K})$$

telles que

$$B = Q^{-1}AP$$

alors $\det A = \det B$.

❍ Vrai ❍ Faux

4

On considère une matrice à coefficients *entiers*.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{Z})$$

$\boxed{\textbf{4.a.}}$ Soit g, le pgcd de a et b. Le déterminant $\det A$ est divisible par g.

❍ Vrai ❍ Faux

$\boxed{\textbf{4.b.}}$ Si $\det A = 1$, alors a et b sont premiers entre eux.

❍ Vrai ❍ Faux

$\boxed{\textbf{4.c.}}$ Si a et b sont premiers entre eux, alors

$$\det A = 1.$$

❍ Vrai ❍ Faux

5

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

est égal à

❑ $+1$

❑ -1

❑ 0

❑ une autre valeur

6

Le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

est égal à 5.

❍ Vrai ❍ Faux

❑ C'est clair

❑ Il faut poser le calcul

7

Le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

est égal à -1.

❏ Oui, bien sûr !

❏ Non, bien sûr !

❏ Il faudrait développer par la première colonne

❏ Il faudrait appliquer la règle de Sarrus

8

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{Z})$.

8.a. Le déterminant de A est un entier relatif.

❍ Vrai ❍ Faux

8.b. S'il existe une matrice $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{Z})$ telle que

$$AB = I_n,$$

alors

$$\det A = \det(B) = \pm 1.$$

❍ Vrai ❍ Faux

8.c. Si $\det A = 1$, alors il existe une matrice

$$B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{Z})$$

telle que

$$AB = I_n.$$

❍ Vrai ❍ Faux