MPSI 2 – Semaine 27

A. On veut calculer le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

A - 1. Que donne la règle de Sarrus ?
A - 2.a. Est-il envisageable de re-calculer ce déterminant en développant par une ligne ou par une colonne ?
A - 2.b. Vérifier que

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 5 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

et conclure.

⋆

B. Calculer, aussi rapidement que possible, le déterminant suivant.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

⋆

C. Calculer le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

avec la règle de Sarrus et sans la règle de Sarrus.

⋆

D. Calculer le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & -2 & -2 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix}$$

avec la règle de Sarrus et sans la règle de Sarrus.

⋆

E. Calculer le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -3 & 6 & -6 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

⋆

F. Calculer le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

⋆

G. Soient a et b, deux nombres complexes différents de 0. Calculer le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \ddots & b \\ b & 0 & \cdots & 0 & a \end{pmatrix}.$$

À quelle condition sur a et b cette matrice est-elle inversible ? Retrouver cette condition en caractérisant le noyau de A.

⋆

H. Soient a et b, deux nombres complexes distincts. Calculer le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}).$$

Cette matrice est-elle inversible ?

⋆

I. Soient a, b et c, trois nombres complexes. Calculer

$$D_2 = \begin{vmatrix} a & c \\ b & 1 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad D_3 = \begin{vmatrix} a & 0 & c \\ 0 & a & c \\ b & b & 1 \end{vmatrix}$$

puis, pour tout $n \geqslant 3$, trouver une formule de récurrence liant

$$D_n = \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & c \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a & c \\ b & \cdots & \cdots & b & 1 \end{vmatrix}_n$$

à D_{n-1}.
NB : L'indice n indique qu'il s'agit ici du déterminant d'une matrice appartenant à $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

⋆

J. Soient a, b et c, trois nombres complexes. Pour tout entier $n \geqslant 2$, on note D_n, le déterminant de la matrice *tridiagonale*

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ c & a & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & a & b \\ 0 & \cdots & 0 & c & a \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}).$$

On convient de $D_1 = a$. Calculer D_2 et D_3. Établir une relation de récurrence entre D_n, D_{n-1} et D_{n-2} pour tout $n \geqslant 4$ et vérifier que cette relation est encore valable pour $n = 3$.

⋆

K. Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. Démontrer que la fonction f définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{vmatrix} a_{1,1} + x & \cdots & a_{1,n} + x \\ a_{2,1} + x & \cdots & a_{2,n} + x \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} + x & \cdots & a_{n,n} + x \end{vmatrix}$$

est une fonction affine de x.