MPSI 2 – Semaine 27

❧ *Il y a plusieurs manières de calculer un déterminant.*
- *Le calcul du déterminant de $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$ se calcule par un "produit en croix".*
- *Le calcul du déterminant de $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{K})$ peut se calculer par la règle de Sarrus (mais ce serait une erreur d'appliquer systématiquement cette formule).*
- *Pour une matrice triangulaire (éventuellement diagonale), le déterminant est égal au produit des coefficients diagonaux.*
- *Pour une matrice triangulaire par blocs (éventuellement diagonale par blocs), le déterminant est égal au produit des déterminants des blocs diagonaux.*
- *Pour une matrice quelconque $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, on peut développer par la i-ème ligne :*

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \times c_{i,j} \qquad (i \text{ fixé})$$

ou par la j-ème colonne

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \times c_{i,j} \qquad (j \text{ fixé})$$

*où le facteur $a_{i,j}$ est le coefficient de A situé à l'intersection de la i-ème et de la j-ème colonne et le **cofacteur** $c_{i,j}$ est défini par*

$$c_{i,j} = (-1)^{i+j} \cdot \det A_{i,j},$$

*le **mineur** $\det A_{i,j}$ étant le déterminant de la matrice*

$$A_{i,j} \in \mathfrak{M}_{n-1}(\mathbb{K})$$

obtenue en supprimant la i-ème et la j-ème colonne de A.
NB : *ces formules développées sont particulièrement intéressantes lorsque le nombre de facteurs $a_{i,j}$ non nuls est petit devant n.*
- *Enfin, la formule*

$$\det A = \sum_{\alpha \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \cdot a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$$

n'a qu'un intérêt théorique, elle ne doit pas être employée dans les calculs numériques.

❧ *Il faut connaître les effets des opérations de pivot sur la valeur du déterminant.*
- *Les opérations*

$$L_i \leftarrow L_i + aL_j \quad \textit{ou} \quad C_i \leftarrow C_i + aC_j$$

ne modifient pas le déterminant.
- *L'échange de deux lignes ou de deux colonnes*

$$L_i \leftrightarrow L_j \qquad C_i \leftrightarrow C_j$$

change le signe du déterminant.
- *Le déterminant est linéaire par rapport à chaque ligne de la matrice et par rapport à chaque colonne de la matrice, ce qui permet parfois de l'écrire sous forme factorisée.*

A. On veut calculer le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

A - 1. Que donne la règle de Sarrus ?

D'après la règle de Sarrus,

$$\det A = 8+3+1+2+2-6 = 10.$$

A - 2.a. Est-il envisageable de re-calculer ce déterminant en développant par une ligne ou par une colonne ?

Oui, mais ce serait long...
Il serait plus raisonnable d'effectuer des opérations de pivot pour se ramener au déterminant d'une matrice plus simple.
Le meilleur choix consiste à retenir un coefficient égal à ± 1, à effectuer des opérations de la forme

$$L_i \leftarrow L_i + a.L_j \quad \textit{ou} \quad C_i \leftarrow C_i + a.C_j$$

(qui conservent le déterminant) pour se ramener au déterminant d'une matrice de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.

A - 2.b. Vérifier que

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 5 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

et conclure.

Les opérations

$$C_1 \leftarrow C_1 + 2C_3 \quad \textit{et} \quad C_2 \leftarrow C_2 + C_3$$

conservent le déterminant.
En factorisant la première colonne par 5 et en développant par la première ligne, on en déduit que

$$\det A = 5 \times (-1)^{1+3}.(-1).\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 10.$$

REMARQUE.— *L'avantage de la seconde méthode est qu'elle s'applique aux matrices carrées de toute taille (alors que la règle de Sarrus ne s'applique que dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{K})$) et au fondement du calcul par récurrence des déterminants dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.*

⋆

B. Calculer, aussi rapidement que possible, le déterminant suivant.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

Il n'y a qu'un seul coefficient non nul sur la première ligne, donc il est intéressant de développer par la première ligne pour se ramener à un déterminant plus simple.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times (-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

À nouveau, on ne trouve qu'un seul coefficient non nul sur la première ligne et on développe par la première ligne.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times (-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

On en déduit que

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \times (-1) \times (-2-2) = -4.$$

$\star$

C. Calculer le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

avec la règle de Sarrus et sans la règle de Sarrus.

❧ *La règle de Sarrus nous dit que*

$$\det A = 2 + 3 + 4 - 12 + 1 + 2 = 0.$$

❧ *Avant de développer, on effectue quelques opérations de pivot pour simplifier l'expression de la matrice. Le plus simple est de s'appuyer sur un coefficient unitaire (par exemple* $a_{1,1} = 1$*) pour effectuer les opérations de pivot : avec (par exemple)*

$$L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \quad \textit{et} \quad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$$

on obtient

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & -5 & 5 \end{vmatrix}.$$

Comme les deux dernières lignes sont proportionnelles, la matrice n'est pas inversible, donc son déterminant est nul.

$\star$

D. Calculer le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & -2 & -2 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix}$$

avec la règle de Sarrus et sans la règle de Sarrus.

❧ *La règle de Sarrus nous dit que*

$$\det A = 20 - 18 - 24 - 6 + 60 + 24 = 56.$$

❧ *On s'appuie sur le coefficient* $a_{1,3} = -1$ *pour que les opérations de pivot soient aussi simples que possible. Avec les opérations*

$$C_1 \leftarrow C_1 + 2C_3 \quad \textit{et} \quad C_2 \leftarrow C_2 + 4C_3$$

on obtient

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & -10 & -2 \\ -7 & -14 & -5 \end{vmatrix} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 10 & 2 \\ 7 & 14 & 5 \end{vmatrix}$$

et on développe par la première ligne

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 10 & 2 \\ 7 & 14 & 5 \end{vmatrix} = 1 \times (-1)^{1+3} \times \begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 7 & 14 \end{vmatrix}$$

avant de factoriser la dernière ligne par 7

$$\begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 7 & 14 \end{vmatrix} = 7 \times \begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7 \times (-8).$$

On retrouve bien $\det A = 56$.

$\star$

E. Calculer le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -3 & 6 & -6 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

On commence par factoriser la deuxième ligne par 3, puis la deuxième colonne par 2 (plus les coefficients sont petits, plus les calculs seront faciles).

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -3 & 6 & -6 \\ 3 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 3 \times \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 3 & 6 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \times \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 3 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 3 \times 2 \times \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

On effectue les opérations de pivot habituelles pour éliminer autant de coefficients que possible sur une même ligne ou sur une même colonne. On choisit ici de s'appuyer sur le coefficient $a_{2,2} = 1$ pour effectuer les opérations de pivot

$$C_1 \leftarrow C_1 + C_2 \quad \textit{et} \quad C_3 \leftarrow C_3 + 2C_2$$

ce qui nous donne

$$\det A = 6 \times \begin{vmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 8 \end{vmatrix}.$$

On développe par la deuxième ligne.

$$\det A = 6 \times \begin{vmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 8 \end{vmatrix} = 6 \times 1 \times (-1)^{2+2} \times \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}$$

On factorise encore une fois avant de calculer le produit en croix (afin de conserver les entiers les plus petits possible).

$$\det A = 6 \times \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 6 \times 2 \times \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 12 \times (16 - 15) = 12$$

❧ *On peut vérifier en appliquant la règle de Sarrus.*

$$\det A = 24 - 18 - 72 - 18 + 24 + 72 = 12$$

⋆

F. Calculer le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Si on s'appuie sur un coefficient égal à 1 pour effectuer les opérations de pivot, on va faire rapidement face à des coefficients assez grands... Si on remarque que les coefficients "tournent" de ligne en ligne, on peut en déduire une opération de pivot astucieuse :

$$L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3 + L_4$$

qui permet de factoriser le déterminant

$$\det A = \begin{vmatrix} 10 & 10 & 10 & 10 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 10 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

avant d'effectuer des opérations simples sur les colonnes :

$$C_2 \leftarrow C_2 - C_1, \quad C_3 \leftarrow C_3 - C_1, \quad C_4 \leftarrow C_4 - C_1$$

pour obtenir

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \\ 4 & -3 & -2 & -1 \end{vmatrix}.$$

On développe alors par la première ligne.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \\ 4 & -3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \times (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

On factorise la deuxième colonne par (-2) et la troisième colonne par (-1).

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = (-2) \times (-1) \times \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

On simplifie une nouvelle fois en effectuant les opérations de pivot suivantes

$$C_1 \leftarrow C_1 - C_3 \quad \textit{et} \quad C_2 \leftarrow C_2 + C_3$$

pour obtenir

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

En permutant la première et la troisième colonne, on est ramené à une matrice triangulaire

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \end{vmatrix}$$

et le calcul est fini :

$$\det A = 10 \times 2 \times (-1) \times (-8) = 160.$$

⋆

G. Soient a et b, deux nombres complexes différents de 0. Calculer le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \ddots & b \\ b & 0 & \cdots & 0 & a \end{pmatrix}.$$

À quelle condition sur a et b cette matrice est-elle inversible ? Retrouver cette condition en caractérisant le noyau de A.

Il n'y a que deux coefficients non nuls sur chaque ligne et sur chaque colonne, nous allons développer par la première colonne. (On pourrait aussi bien développer par la dernière ligne, toutes les autres possibilités seraient plus compliquées.)

NB : *il n'est jamais simple de développer le déterminant d'une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, on a tout intérêt à expliciter clairement le calcul du mineur pour limiter les risques d'erreur. (Dans l'exemple qui suit, les coefficients supprimés sont écrits en rouge.)*

$$\det A = a \times (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} a & b & 0 & & & 0 \\ 0 & a & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a & \ddots & \ddots & \vdots \\ & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \ddots & b \\ b & 0 & \cdots & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$$

$$+ b \times (-1)^{n+1} \times \begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a & \ddots & \ddots & \vdots \\ & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \ddots & b \\ b & 0 & & & 0 & a \end{vmatrix}$$

$$= a \times a^{n-1} + (-1)^{n+1} b \times b^{n-1} = a^n - (-b)^n.$$

❧ *La matrice A est inversible si, et seulement si, son déterminant n'est pas nul, c'est-à-dire si, et seulement si, $(-a/b)$ n'est pas une racine n-ième de l'unité.*

❧ *Supposons que*

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} A.$$

L'équation $AX = 0$ se traduit par

$$\forall\, 1 \leqslant i < n, \quad a x_i + b x_{i+1} = 0 \tag{1}$$

et par

$$a x_n + b x_1 = 0. \tag{2}$$

Comme $b \neq 0$, on déduit de (1) que

$$\forall\, 1 \leqslant i < n, \quad x_{i+1} = \frac{-a}{b} \cdot x_i$$

et donc que

$$\forall\, 2 \leqslant i \leqslant n, \quad x_i = \left(\frac{-a}{b}\right)^{i-1} \cdot x_1, \tag{3}$$

ce qui prouve que

$$\operatorname{Ker} A \subset \mathbb{K} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ q \\ \vdots \\ q^{i-1} \\ \vdots \\ q^{n-1} \end{pmatrix}$$

où $q = -a/b$.
Il reste à tenir compte de l'équation (2) qui devient alors

$$a.q^{n-1}.x_1 + b.x_1 = 0$$

ce qui équivaut à :

$$\left[(-a)^n - b^n\right] \cdot x_1 = 0.$$

Si $(-a)^n \neq b^n$, alors il faut $x_1 = 0$ et on déduit de (3) que le noyau de A est réduit au vecteur nul. En particulier, la matrice A est inversible.
Si $(-a)^n = b^n$, cette dernière équation est vraie pour tout $x_1 \in \mathbb{R}$, donc

$$\operatorname{Ker} A = \mathbb{K} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ q \\ \vdots \\ q^{i-1} \\ \vdots \\ q^{n-1} \end{pmatrix}$$

et la matrice A n'est pas inversible.
On a ainsi redémontré que la matrice A était inversible si, et seulement si, $q = -{}^{a}\!/_{b}$ était une racine n-ième de l'unité.

⋆

H. Soient a et b, deux nombres complexes distincts. Calculer le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}).$$

Cette matrice est-elle inversible ?

En effectuant les opérations de pivot suivantes

$$\forall\, 1 \leqslant j < n, \quad C_j \leftarrow C_j - C_n$$

on obtient

$$\det A = \begin{vmatrix} a-b & 0 & \cdots & 0 & b \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a-b & b \\ b-a & \cdots & \cdots & b-a & a \end{vmatrix}.$$

Une dernière opération de pivot

$$L_n \leftarrow L_n + (L_1 + \cdots + L_{n-1})$$

nous amène à une matrice triangulaire

$$\det A = \begin{vmatrix} a-b & 0 & \cdots & 0 & b \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a-b & b \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a+(n-1)b \end{vmatrix}$$

et à la conclusion :

$$\det A = (a-b)^{n-1}\big[a + (n-1)b\big].$$

❧ *Comme $a \neq b$ par hypothèse, la matrice A est inversible si, et seulement si,*

$$a + (n-1)b \neq 0$$

et on peut vérifier que, si $a = -(n-1)b$, le noyau de la matrice A est la droite vectorielle dirigée par le vecteur

$$U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

⋆

I. Soient a, b et c, trois nombres complexes. Calculer

$$D_2 = \begin{vmatrix} a & c \\ b & 1 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad D_3 = \begin{vmatrix} a & 0 & c \\ 0 & a & c \\ b & b & 1 \end{vmatrix}$$

puis, pour tout $n \geqslant 3$, trouver une formule de récurrence liant

$$D_n = \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & c \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a & c \\ b & \cdots & \cdots & b & 1 \end{vmatrix}_n$$

à D_{n-1}.
NB : L'indice n indique qu'il s'agit ici du déterminant d'une matrice appartenant à $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

❧ *Il est clair que* $D_2 = a - bc$ *et que* $D_3 = a^2 - 2abc$.
❧ *Pour relier* D_n *à* D_{n-1}*, on développe* D_n *par la première colonne, ce qui exprimer* D_n *comme la somme de deux termes. (Pour faire apparaître clairement le calcul des mineurs, on écrit en rouge les coefficients supprimés.)*

$$
\begin{aligned}
D_n =& a \times (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} a & 0 & & & 0 & c \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & c \\ & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & \vdots & & \ddots & 0 & c \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a & c \\ b & b & \cdots & b & b & 1 \end{vmatrix}_{n-1} \\
& + b \times (-1)^{n+1} \times \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & & 0 & c \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & c \\ & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & \vdots & & \ddots & 0 & c \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a & c \\ b & b & & b & b & 1 \end{vmatrix}_{n-1} \\
=& aD_{n-1} + (-1)^{n+1} b \begin{vmatrix} 0 & \cdots & & 0 & c \\ a & 0 & \cdots & 0 & c \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & c \\ 0 & \cdots & 0 & a & c \end{vmatrix}_{n-1}
\end{aligned}
$$

On développe ce nouveau déterminant par la première ligne. NB : *il est important d'avoir noté la taille de la matrice pour connaître à coup sûr le signe du cofacteur.*

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 0 & \cdots & & 0 & c \\ a & 0 & \cdots & 0 & c \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & c \\ 0 & \cdots & 0 & a & c \end{vmatrix}_{n-1}
&= c \times (-1)^{1+(n-1)} \times \begin{vmatrix} 0 & & & 0 & c \\ a & 0 & \cdots & 0 & c \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \\ \vdots & & \ddots & 0 & c \\ 0 & \cdots & 0 & a & c \end{vmatrix}_{n-2} \\
&= c \times (-1)^n \times a^{n-2}
\end{aligned}
$$

On a donc

$$\forall\, n \geqslant 3, \quad D_n = aD_{n-1} - a^{n-1}bc.$$

On peut en déduire par récurrence que

$$\forall\, n \geqslant 2, \quad D_n = a^{n-2}\big[a - (n-1)bc\big].$$

⋆

J. Soient a, b et c, trois nombres complexes. Pour tout entier $n \geqslant 2$, on note D_n, le déterminant de la matrice *tridiagonale*

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ c & a & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & a & b \\ 0 & \cdots & 0 & c & a \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}).$$

On convient de $D_1 = a$. Calculer D_2 et D_3. Établir une relation de récurrence entre D_n, D_{n-1} et D_{n-2} pour tout $n \geqslant 4$ et vérifier que cette relation est encore valable pour $n = 3$.

❧ *Il est clair que* $D_2 = a^2 - bc$ *et on vérifie que*

$$D_3 = \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ c & a & b \\ 0 & c & a \end{vmatrix} = a^3 - 2abc$$

(par exemple avec la règle de Sarrus).
❧ *Pour trouver la relation de récurrence, on va développer* D_n *par la première colonne (on pourrait aussi bien développer par la première ligne).*
NB : *Pour y voir clair, on écrit en rouge les coefficients supprimés et on indique par un indice la taille de la matrice qui subsiste (dont les coefficients sont en bleu).*
Pour $n \geqslant 4$,

$$\begin{aligned}
D_n &= \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c & a & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c & a & b & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & c & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & c & a \end{vmatrix}_n \\
&= a \times (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 & & 0 \\ c & a & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c & a & b & \ddots & \vdots \\ & 0 & c & \ddots & \ddots & 0 \\ & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & c & a \end{vmatrix}_{n-1} \\
&\quad + c \times (-1)^{2+1} \times \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c & a & b & 0 & & 0 \\ 0 & c & a & b & \ddots & \vdots \\ & 0 & c & \ddots & \ddots & 0 \\ & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & c & a \end{vmatrix}_{n-1} \\
&= aD_{n-1} - c \times b \times (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} b & 0 & 0 & & 0 \\ c & a & b & \ddots & \vdots \\ 0 & c & \ddots & \ddots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & \cdots & 0 & c & a \end{vmatrix}_{n-2} \\
&= aD_{n-1} - bcD_{n-2}.
\end{aligned}$$

❧ *Comme* $D_3 = a^3 - 2abc = aD_2 - bcD_1$, *cette relation est encore vraie pour* $n = 3$.

⋆

K. Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. Démontrer que la fonction f définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{vmatrix} a_{1,1} + x & \cdots & a_{1,n} + x \\ a_{2,1} + x & \cdots & a_{2,n} + x \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} + x & \cdots & a_{n,n} + x \end{vmatrix}$$

est une fonction affine de x.

Effectuons les opérations de pivot

$$\forall\, 2 \leqslant j \leqslant n, \quad C_j \leftarrow C_j - C_1.$$

Comme ces opérations conservent la valeur du déterminant, on en dé-

duit que

$$f(x) = \begin{vmatrix} a_{1,1}+x & a_{1,2}-a_{1,1} & \cdots & a_{1,n}-a_{1,1} \\ a_{2,1}+x & a_{2,2}-a_{2,1} & \cdots & a_{2,n}a-a_{2,1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1}+x & a_{i,2}-a_{i,1} & \cdots & a_{i,n}a-a_{i,1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}+x & a_{n,2}-a_{n,1} & \cdots & a_{n,n}-a_{n,1} \end{vmatrix}$$

et en développant par la première colonne on obtient

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} (a_{i,1}+x) \times (-1)^{i+1} \times \det B_{i,j}$$

où $B_{i,j}$ *est une matrice dont les coefficients sont indépendants de* x*.*
En tant que combinaison linéaire de fonctions affines de x*, la fonction* f *est une fonction affine de* x*.*