Produit scalaire — juin 2020

Les questions indexées par des numéros différents sont indépendantes.

1

On considère $E = \mathbb{R}^d$.

1.a. L'application définie par

$$\langle x \mid y \rangle = \sum_{k=1}^{d} 2^k x_k y_k$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^d$.

❍ Vrai ❍ Faux

1.b. L'application définie par

$$\langle x \mid y \rangle = \sum_{k=1}^{d} k x_k y_k$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^d$.

❍ Vrai ❍ Faux

1.c. L'application définie par

$$\langle x \mid y \rangle = \sum_{k=1}^{d} x_k^2 y_k^2$$

- ❏ est un produit scalaire
- ❏ n'est pas bilinéaire
- ❏ n'est pas symétrique
- ❏ n'est pas définie positive

2

2.a. L'application définie par

$$\langle P \mid Q \rangle = \sum_{k=0}^{3} \frac{P(k)Q(k)}{2^k}$$

est un produit scalaire

- ❏ sur $\mathbb{R}_2[X]$
- ❏ sur $\mathbb{R}_3[X]$
- ❏ sur $\mathbb{R}_4[X]$
- ❏ sur $\mathbb{R}[X]$

2.b. L'application définie sur $\mathbb{R}_d[X] \times \mathbb{R}_d[X]$ par

$$\langle P \mid Q \rangle = \sum_{k=0}^{d} (-1)^k P(k)Q(k)$$

- ❏ est un produit scalaire
- ❏ n'est pas bilinéaire
- ❏ n'est pas symétrique
- ❏ n'est pas définie positive

2.c. L'application définie sur $\mathbb{R}_d[X] \times \mathbb{R}_d[X]$ par

$$\langle P \mid Q \rangle = \sum_{k=0}^{d} P(-k)Q(k)$$

- ❏ est un produit scalaire
- ❏ n'est pas bilinéaire
- ❏ n'est pas symétrique
- ❏ n'est pas définie positive

3

On considère ici l'espace E des fonctions continues sur le segment $[-1, 1]$.

3.a. L'application définie par

$$\langle f \mid g \rangle = \int_{-1}^{1} |f(t)g(t)| \, dt$$

- ❏ est un produit scalaire
- ❏ n'est pas bilinéaire
- ❏ n'est pas symétrique
- ❏ n'est pas définie positive

3.b. L'application définie par

$$\langle f \mid g \rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)e^{-t} \, dt$$

- ❏ est un produit scalaire
- ❏ n'est pas bilinéaire
- ❏ n'est pas symétrique
- ❏ n'est pas définie positive

3.c. L'application définie par

$$\langle f \mid g \rangle = \int_{-1}^{1} f^2(t)g(t)\,dt$$

- ❏ est un produit scalaire
- ❏ n'est pas bilinéaire
- ❏ n'est pas symétrique
- ❏ n'est pas définie positive

3.d. L'application définie par

$$\langle f \mid g \rangle = \int_{-1}^{1} |f(t) + g(t)|\,dt$$

- ❏ est un produit scalaire
- ❏ n'est pas bilinéaire
- ❏ n'est pas symétrique
- ❏ n'est pas définie positive

3.e. L'application définie par

$$\langle f \mid g \rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\sin t\,dt$$

- ❏ est un produit scalaire
- ❏ n'est pas bilinéaire
- ❏ n'est pas symétrique
- ❏ n'est pas définie positive

4

On considère ici l'espace $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique.

4.a. La base canonique de $\mathbb{R}^3$ est une base orthonormée.

❍ Vrai ❍ Faux

4.b. Dans $\mathbb{R}^3$, la famille

$$\mathscr{B} = \big((2,0,0), (0,-1,0), (0,0,3)\big)$$

- ❏ est une base
- ❏ est une base orthogonale
- ❏ est une base orthonormée
- ❏ n'est pas une base

4.c. La famille

$$\mathscr{B} = \big((1,1,-1), (2,1,3), (4,-5,-1)\big)$$

est une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$.

❍ Vrai ❍ Faux

4.d. La famille

$$\mathscr{B} = \big((2,-1,-1),(1,1,1),(1,-2,1)\big)$$

est une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$.

❍ Vrai ❍ Faux

4.e. On pose

$$u = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1) \quad \text{et} \quad v = \frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,1).$$

Pour que la famille (u,v,w) soit une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$, il y a

- ❑ un seul choix possible
- ❑ exactement deux choix possibles
- ❑ une infinité de choix possibles
- ❑ Mais non, ce n'est pas possible !

Pour que la famille (u,v,w) soit une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$, il y a

- ❑ un seul choix possible
- ❑ exactement deux choix possibles
- ❑ une infinité de choix possibles
- ❑ Mais non, ce n'est pas possible !

5

L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique.
On considère le plan P d'équation

$$[2x - y + z = 0]$$

et la droite vectorielle D dirigée par le vecteur

$$u = (-1,1,3).$$

5.a. La droite D est orthogonale au plan P.

❍ Vrai ❍ Faux

5.b. Il existe une droite vectorielle orthogonale au plan P et à la droite D.

- ❑ Oui, il en existe une seule
- ❑ Oui, il en existe une infinité
- ❑ Non, c'est impossible

5.c. Si une droite vectorielle Δ est orthogonale à la droite D, alors elle est orthogonale au plan P.

- ❑ Oui, bien sûr
- ❑ Non, pas forcément
- ❑ C'est compliqué...

5.d. Si une droite vectorielle Δ est orthogonale au plan P, alors elle est orthogonale à la droite D.

- ❑ Oui, bien sûr
- ❑ Non, pas forcément
- ❑ C'est compliqué...

6

L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique.
On considère le vecteur x représenté dans une base $\mathscr{B}$ par

$$X = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

6.a. Si la norme du vecteur x est égale à 5, alors la base $\mathscr{B}$ n'est pas orthonormée.

❏ C'est clair !

❏ C'est possible...

❏ Aucune idée !

6.b. Si la base $\mathscr{B}$ est orthonormée, alors la norme du vecteur x est égale à $\sqrt{11}$.

❏ C'est clair !

❏ C'est possible...

❏ Aucune idée !

6.c. Si la norme du vecteur x est égale à $\sqrt{11}$, alors la base $\mathscr{B}$ est orthonormée.

❏ C'est clair !

❏ C'est possible...

❏ Aucune idée !

7

L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique. On considère les plans P_1 et P_2 représentés dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ par les équations suivantes.

$$P_1 \ : \ [2x + y - 3z = 0] \qquad P_2 \ : \ [x + y + z = 0]$$

7.a. Le vecteur $u_1 = (2, 1, -3)$ est orthogonal au plan P_1.

❍ Vrai ❍ Faux

7.b. Le vecteur $u_2 = (1, 1, 1)$ est orthogonal à u_1.

❍ Vrai ❍ Faux

7.c. Le plan P_2 est orthogonal au plan P_1.

❍ Vrai ❍ Faux

8

On considère un espace euclidien E.

8.a. L'espace E est un espace vectoriel de dimension finie.

❏ Oui, bien sûr !

❏ Mais non, jamais !

❏ Ça dépend...

8.b. Si un sous-espace F n'est pas réduit au vecteur nul, alors il contient un vecteur unitaire.

❏ Oui, bien sûr !

❏ Mais non, jamais !

❏ Ça dépend...

8.c. Si deux sous-espaces F et G sont orthogonaux, alors

$$\mathsf{E} = \mathsf{F} \oplus \mathsf{G}.$$

❏ Oui, bien sûr !

❏ Mais non, jamais !

❏ Ça dépend...

8.d. On suppose que

$$\mathsf{E} = \mathsf{F} \oplus \mathsf{G}.$$

Il existe une base de E obtenue en réunissant une base orthonormée $\mathscr{B}_{\mathsf{F}}$ de F et une base orthonormée $\mathscr{B}_{\mathsf{G}}$ de G.

❏ Oui, bien sûr !

❏ Mais non, jamais !

❏ Ça dépend...

Cette base est même une base orthonormée de E.

❏ Oui, bien sûr !

❏ Mais non, jamais !

❏ Ça dépend...