MPSI 2 – Semaine 28

A. L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique.
On considère
$$F = [2x + 3y - z = 0].$$

A - 1. Donner une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.
A - 2. Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Quelle est sa dimension ?
A - 3. Donner une base de $F^\perp$.
A - 4. Calculer une base orthogonale de F. En déduire une base orthogonale $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ constituée de vecteurs de F et de $F^\perp$.
A - 5. Soient x et y, deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On suppose que

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{et que} \quad \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Exprimer le produit scalaire $\langle\, x \,|\, y \,\rangle$ en fonction des coordonnées x_i et y_j.
A - 6. Calculer la matrice relative à la base canonique $\mathscr{B}_0$ de la projection orthogonale sur F.

⋆

B. L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique.
On considère
$$G = [x - 2y + z = 0].$$

B - 1. Donner une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.
B - 2. Démontrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Quelle est sa dimension ?
B - 3. Donner une base de $G^\perp$.
B - 4. Calculer une base orthogonale de G. En déduire une base orthogonale $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ constituée de vecteurs de G et de $G^\perp$.
B - 5. Soient x et y, deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On suppose que

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{et que} \quad \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Exprimer le produit scalaire $\langle\, x \,|\, y \,\rangle$ en fonction des coordonnées x_i et y_j.
B - 6. Calculer la matrice relative à la base canonique $\mathscr{B}_0$ de la projection orthogonale sur G.

⋆

C. L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique.
On considère
$$H = [2x - y + 4z = 0].$$

C - 1. Donner une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.
C - 2. Démontrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Quelle est sa dimension ?
C - 3. Donner une base de $H^\perp$.
C - 4. Calculer une base orthogonale de H. En déduire une base orthogonale $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ constituée de vecteurs de H et de $H^\perp$.
C - 5. Soient x et y, deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On suppose que

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{et que} \quad \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Exprimer le produit scalaire $\langle\, x \,|\, y \,\rangle$ en fonction des coordonnées x_i et y_j.

C - 6. Calculer la matrice relative à la base canonique $\mathscr{B}_0$ de la projection orthogonale sur H.

$\star$

D.
L'espace $\mathsf{E} = \mathbb{R}^4$ est muni de sa structure euclidienne canonique. La base canonique de $\mathbb{R}^4$ est nommée $\mathscr{B}_0$.
On considère le sous-espace

$$\mathsf{F} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right).$$

D - 1. Calculer une base orthogonale $\mathscr{B}_\perp$ de $\mathsf{F}^\perp$.
D - 2. En déduire une base orthonormée $\mathscr{B}$ de E dont les deux premiers vecteurs appartiennent à F.
D - 3. Calculer les matrices relatives à la base canonique $\mathscr{B}_0$ de la projection orthogonale sur F et de la projection orthogonale sur $\mathsf{F}^\perp$.

$\star$

E.
L'espace $\mathsf{E} = \mathbb{R}^4$ est muni de sa structure euclidienne canonique. On considère l'ensemble

$$\mathsf{F} = [x + 3y - z + 2t = 0].$$

E - 1. Démontrer que F est un sous-espace de dimension 3.
E - 2. Calculer une base orthogonale de F.