MPSI 2 – Semaine 28

Les trois premiers exercices sont conçus sur le même modèle : je donne les solutions détaillées pour le premier, je ne donne que les résultats numériques pour les deux autres.

▶ ***Une formule essentielle à connaître***

❧ *Connaissant une base*

$$\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_d)$$

de E *et les représentations de deux vecteurs* x *et* y *dans cette base :*

$$x = \sum_{i=1}^{d} x_i \cdot e_i \quad et \quad y = \sum_{j=1}^{d} y_j \cdot e_j$$

alors

$$\langle\, x \,|\, y \,\rangle = \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} x_i y_j \langle\, e_i \,|\, e_j \,\rangle \tag{1}$$

par bilinéarité du produit scalaire.

❧ *En particulier, si la base* $\mathscr{B}$ *est orthogonale, alors*

$$\langle\, x \,|\, y \,\rangle = \sum_{i=1}^{d} \|e_i\|^2 x_i y_i \tag{2}$$

et si la base $\mathscr{B}$ est une base orthonormée,

$$\langle\, x \,|\, y \,\rangle = \sum_{i=1}^{d} x_i y_i. \tag{3}$$

▶ ***Convention à connaître***

Par définition, si $\mathbb{R}^d$ *est muni de sa structure euclidienne canonique, alors la base canonique est une base orthonormée.*

On peut dans ce cas appliquer la formule (3).

A. L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique.

On considère

$$F = [2x + 3y - z = 0].$$

A - 1. Donner une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

Comme $\mathbb{R}^3$ *est muni de sa structure euclidienne canonique, la base canonique*

$$\big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big)$$

est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

A - 2. Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Quelle est sa dimension ?

L'ensemble F *est le noyau de la forme linéaire*

$$[(x,y,z) \mapsto 2x + 3y - z] \;:\; \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

et comme cette forme linéaire n'est pas identiquement nulle (l'image des vecteurs de la base canonique est différente de 0*), l'ensemble* F *est un hyperplan de* $\mathbb{R}^3$*, c'est-à-dire un sous-espace vectoriel de dimension* $3 - 1 = 2$.

A - 3. Donner une base de $F^\perp$.

Comme $\mathbb{R}^3$ *est un espace de dimension* finie*, le sous-espace* $F^\perp$ *est un supplémentaire de* F*, donc*

$$\dim F^\perp = \dim \mathbb{R}^3 - \dim F = 1.$$

Ainsi $F^\perp$ *est une droite vectorielle et une base de* $F^\perp$ *est en fait un vecteur directeur.*

❧ *Considérons les vecteurs*

$$n = (2, 3, -1) \quad \textit{et} \quad u_0 = (x, y, z).$$

Comme la base canonique est orthonormée,

$$\langle\, n \,|\, u_0 \,\rangle = 2x + 3y - z$$

ce qu'on interprète de la manière suivante :

$$u_0 \in F \iff \langle\, n \,|\, u_0 \,\rangle = 0$$

c'est-à-dire

$$u_0 \in F \iff u_0 \in (\mathbb{R} \cdot u_0)^{\perp}$$

ou encore

$$F = (\mathbb{R} \cdot u_0)^{\perp}.$$

Comme $\mathbb{R}^3$ *est un espace de* dimension finie, *on en déduit que*

$$F^{\perp} = \mathbb{R} \cdot u_0$$

et donc que $u_0 = (2, 3, -1)$ *est un vecteur directeur de la droite* $F^{\perp}$.

A - 4. Calculer une base orthogonale de F. En déduire une base orthogonale $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ constituée de vecteurs de F et de $F^{\perp}$.

► *Comme* F *est un plan (dimension = 2), une base orthogonale de* F *est un couple de deux vecteurs orthogonaux de* F. *Au moins trois méthodes sont possibles !*

❧ *On choisit une base de* F *et on applique l'algorithme de Gram-Schmidt (le temps de redresser l'angle entre les deux vecteurs choisis).*
Considérons par exemple

$$u_1 = (1, 0, 2) \quad \textit{et} \quad u_2 = (0, 1, 3),$$

deux solutions évidentes et non proportionnelles de l'équation qui caractérisent F.
On conserve u_1 *et on cherche un vecteur de la forme*

$$u = u_2 + \alpha \cdot u_1$$

qui soit orthogonal à u_1 *:*

$$\langle\, u \,|\, u_1 \,\rangle = \langle\, u_2 \,|\, u_1 \,\rangle + \alpha \langle\, u_1 \,|\, u_1 \,\rangle = 0.$$

Comme la base canonique est orthonormée,

$$\langle\, u_1 \,|\, u_1 \,\rangle = 5 \quad \textit{et} \quad \langle\, u_2 \,|\, u_1 \,\rangle = 6$$

donc $\alpha = {-6}/{5}$ *convient. Pour éviter les fractions, nous allons poser*

$$u_3 = 5 \cdot u_2 - 6 \cdot u_1 = (-6, 5, 3)$$

et nous avons une base orthogonale de F *:*

$$(u_1, u_3) = \big((1, 0, 2), (-6, 5, 3)\big).$$

❧ *Autre possibilité : on cherche un vecteur* $u_3 = (x, y, z)$ *dans le plan* F, *c'est-à-dire tel que*

$$2x + 3y - z = 0$$

et qui soit orthogonal au vecteur u_1, *c'est-à-dire tel que*

$$\langle\, u_1 \,|\, u_3 \,\rangle = x + 2z = 0.$$

On résout alors le système

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ x + 2z = 0 \end{cases}$$

et on trouve que les solutions sont proportionnelles au vecteur $(6, -5, -3)$.

❧ *Troisième possibilité : connaissant* $u_0 \in F^\perp$ *et* $u_1 \in F$, *on pose*

$$u_3 = u_0 \wedge u_1.$$

Ce vecteur est orthogonal à u_0, *donc orthogonal à* $F^\perp$ *et par conséquent, ce vecteur appartient à* $F = (F^\perp)^\perp$ *et ce vecteur est aussi orthogonal à* u_1.
Le calcul des coordonnées de ce produit vectoriel (dans la base canonique qui est orthonormée et directe par convention) nous redonne $u_3 = (6, -5, -3)$.

REMARQUE.— *Peu importe qu'on choisisse* $(6, -5, -3)$ *ou* $(-6, 5, 3)$ *: ces deux vecteurs sont colinéaires.*

► *On connaît maintenant un vecteur directeur* u_0 *de* $F^\perp$ *et une base* (u_1, u_3) *de* F.
Comme

$$\mathbb{R}^3 = F^\perp \oplus F,$$

en réunissant ces deux bases, on obtient une base

$$\mathscr{B} = (u_0, u_1, u_3)$$

de $\mathbb{R}^3$.
Comme les sous-espaces vectoriels F *et* $F^\perp$, *on sait (sans aucun calcul) que*

$$\langle\, u_0 \,|\, u_1 \,\rangle = \langle\, u_0 \,|\, u_3 \,\rangle = 0$$

et comme (u_1, u_3) *est une base orthogonale de* F,

$$\langle\, u_1 \,|\, u_3 \,\rangle = 0.$$

Cela prouve donc que la base $\mathscr{B}$ *est une base orthogonale de* $\mathbb{R}^3$.

REMARQUE.— *Cette base n'est pas orthonormée car*

$$\|u_0\|^2 = 14, \quad \|u_1\|^2 = 5, \quad \|u_3\|^2 = 70.$$

A - 5. Soient x et y, deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On suppose que

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{et que} \quad \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Exprimer le produit scalaire $\langle\, x \,|\, y \,\rangle$ en fonction des coordonnées x_i et y_j.

Si $(\varepsilon_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ *est une base orthogonale de* E, *alors*

$$x = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\frac{\langle\, x \,|\, \varepsilon_k \,\rangle}{\langle\, \varepsilon_k \,|\, \varepsilon_k \,\rangle}}_{x_k} \cdot \varepsilon_k \qquad y = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\frac{\langle\, y \,|\, \varepsilon_k \,\rangle}{\langle\, \varepsilon_k \,|\, \varepsilon_k \,\rangle}}_{y_k} \cdot \varepsilon_k$$

et

$$\langle\, x \,|\, y \,\rangle = \sum_{k=1}^{n} \frac{\langle\, x \,|\, \varepsilon_k \,\rangle \langle\, \varepsilon_k \,|\, y \,\rangle}{\langle\, \varepsilon_k \,|\, \varepsilon_k \,\rangle} = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \langle\, \varepsilon_k \,|\, \varepsilon_k \,\rangle.$$

Par conséquent, avec la base orthogonale choisie,

$$\langle\, x \,|\, y \,\rangle = 14x_1y_1 + 5x_2y_2 + 70x_3y_3.$$

REMARQUE.— *On peut aussi appliquer directement la propriété* (2).

A - 6. Calculer la matrice relative à la base canonique $\mathscr{B}_0$ de la projection orthogonale sur F.

Comme $F^\perp$ *est la droite vectorielle dirigée par le vecteur* u_0, *la projection orthogonale* q *sur* $F^\perp$ *est définie par*

$$\forall\, u \in \mathbb{R}^3, \quad q(u) = \frac{\langle\, u_0 \,|\, u \,\rangle}{\langle\, u_0 \,|\, u_0 \,\rangle} \cdot u_0$$

et la projection orthogonale p *sur* F *est caractérisée par*

$$\forall\, u \in \mathbb{R}^3, \quad p(u) = u - q(u).$$

❧ *Comme la base canonique est orthonormée, le projeté* $q(u)$ *est représenté dans la base canonique par*

$$Q \cdot U = \frac{{}^tU_0 U}{{}^tU_0 U_0} \cdot U_0 = \frac{1}{{}^tU_0 U_0} \cdot U_0 {}^tU_0 \cdot U$$

pour $\boxed{\textit{tout}}$ *vecteur* $u \in \mathbb{R}^3$*. La projection* q *est donc représentée par*

$$Q = \frac{1}{{}^tU_0 U_0} \cdot U_0 {}^tU_0$$

et la projection p *par*

$$P = I_3 - Q.$$

On en déduit que

$$\mathfrak{Mat}_{can}(p) = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 10 & -6 & 2 \\ -6 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 13 \end{pmatrix}.$$

REMARQUE.— *Un certain nombre de vérifications rapides s'impose :*
- *puisqu'on projette sur un plan, la trace doit être égale à 2 ;*
- *puisqu'il s'agit d'une projection* ***orthogonale*** *représentée dans une base* ***orthonormée****, la matrice doit être symétrique ;*
- *puisqu'on projette sur* F*, les colonnes doivent représenter des vecteurs de* F *;*
- *puisqu'on projette orthogonalement sur* F*, le noyau est la droite* $F^\perp$*, donc les colonnes doivent être liées par la relation*

$$2C_1 + 3C_2 - C_3 = 0.$$

⋆

B. L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique.
On considère

$$G = [x - 2y + z = 0].$$

B - 1. Donner une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.
B - 2. Démontrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Quelle est sa dimension ?
B - 3. Donner une base de $G^\perp$.

$G^\perp = \mathbb{R} \cdot (1, -2, 1)$

B - 4. Calculer une base orthogonale de G. En déduire une base orthogonale $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ constituée de vecteurs de G et de $G^\perp$.

Exemple :

$$G = \text{Vect}((1, 0, -1), (1, 1, 1))$$
$$\mathbb{R}^3 = \text{Vect}((1, -2, 1), (1, 0, -1), (1, 1, 1))$$

B - 5. Soient x et y, deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On suppose que

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{et que} \quad \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Exprimer le produit scalaire $\langle\, x \,|\, y \,\rangle$ en fonction des coordonnées x_i et y_j.

Avec la base orthogonale précédente,

$$\langle\, x \,|\, y \,\rangle = 6x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3.$$

B - 6. Calculer la matrice relative à la base canonique $\mathscr{B}_0$ de la projection orthogonale sur G.

$$\mathfrak{Mat}_{can}(p) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$\star$

C. L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique.
On considère
$$H = [2x - y + 4z = 0].$$

C - 1. Donner une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.
C - 2. Démontrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Quelle est sa dimension ?
C - 3. Donner une base de $H^\perp$.
$H^\perp = \mathbb{R} \cdot (2, -1, 4)$
C - 4. Calculer une base orthogonale de H. En déduire une base orthogonale $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ constituée de vecteurs de H et de $H^\perp$.
Exemple :

$$H = \mathrm{Vect}((1,2,0), (-8,4,5))$$
$$\mathbb{R}^3 = \mathrm{Vect}((2,-1,4), (1,2,0), (-8,4,5))$$

C - 5. Soient x et y, deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On suppose que

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{et que} \quad \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Exprimer le produit scalaire $\langle\, x \,|\, y \,\rangle$ en fonction des coordonnées x_i et y_j.
Avec la base orthogonale précédente,

$$\langle\, x \,|\, y \,\rangle = 21x_1y_1 + 5x_2y_2 + 105x_3y_3.$$

C - 6. Calculer la matrice relative à la base canonique $\mathscr{B}_0$ de la projection orthogonale sur H.

$$\mathfrak{Mat}_{can}(p) = \frac{1}{21}\begin{pmatrix} 17 & 2 & -8 \\ 2 & 20 & 4 \\ -8 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$\star$

D.
L'espace $E = \mathbb{R}^4$ est muni de sa structure euclidienne canonique.
La base canonique de $\mathbb{R}^4$ est nommée $\mathscr{B}_0$.
On considère le sous-espace

$$F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right).$$

D - 1. Calculer une base orthogonale $\mathscr{B}_\perp$ de $F^\perp$.
Posons $\varepsilon_1 = (1,1,-1,1)$ *et* $\varepsilon_2 = (2,1,2,-1)$.
Un vecteur $u = (x,y,z,t)$ *appartient à* $F^\perp$ *si, et seulement si,*

$$\langle\, u \,|\, \varepsilon_1 \,\rangle = \langle\, u \,|\, \varepsilon_2 \,\rangle = 0$$

c'est-à-dire s'il est solution du système

$$\begin{cases} x + y - z + t = 0 \\ 2x + y + 2z - t = 0 \end{cases}$$

(on a calculé les produits scalaires dans la base canonique, qui est bien une base orthonormée*).*
Le vecteur u est solution de ce système si, et seulement si,

$$\begin{aligned}(x, y, z, t) &= (x, y, -3x - 2y, -4x - 3y) \\ &= x \cdot (1, 0, -3, -4) + y \cdot (0, 1, -2, -3)\end{aligned}$$

donc

$$F^{\perp} = \operatorname{Vect}\big((1, 0, -3, -4), (0, 1, -2, -3)\big).$$

On a trouvé une base de $F^{\perp}$, mais il ne s'agit pas d'une base orthogonale !
On peut conserver le premier vecteur et en déduire une base orthogonale de $F^{\perp}$ en appliquant l'une des méthodes vues plus haut. On en déduit qu'une base orthogonale de $F^{\perp}$ est par exemple (u_3, u_4) avec

$$u_3 = (1, 0, -3, -4) \quad \textit{et} \quad u_4 = (9, -13, -1, 3).$$

D - 2. En déduire une base orthonormée $\mathscr{B}$ de E dont les deux premiers vecteurs appartiennent à F.
La base

$$\big(u_1 = (1, 1, -1, 1),\ u_2 = (2, 1, 2, -1)\big)$$

qui a servi à définir F est une base orthogonale de F. Comme F et $F^{\perp}$ sont des sous-espaces orthogonaux et supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$ (puisque $\mathbb{R}^4$ est un espace de dimension finie), alors

$$(u_1, u_2, u_3, u_4)$$

est une base orthogonale de $\mathbb{R}^4$ et

$$\left(\frac{u_1}{\|u_1\|}, \frac{u_2}{\|u_2\|}, \frac{u_3}{\|u_3\|}, \frac{u_4}{\|u_4\|}\right)$$

est une base orthonormée de $\mathbb{R}^4$.

D - 3. Calculer les matrices relatives à la base canonique $\mathscr{B}_0$ de la projection orthogonale sur F et de la projection orthogonale sur $F^{\perp}$.
Connaissant une base orthogonale de F, on peut facilement en déduire l'expression de la projection orthogonale sur F :

$$\forall\, v \in \mathbb{R}^4, \quad p(v) = \frac{\langle u_1 \,|\, v \rangle}{\langle u_1 \,|\, u_1 \rangle} \cdot u_1 + \frac{\langle u_2 \,|\, v \rangle}{\langle u_2 \,|\, u_2 \rangle} \cdot u_2.$$

La base canonique étant orthonormée, on en déduit la matrice de p relative à la base canonique :

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{\langle u_1 \,|\, u_1 \rangle} \cdot U_1{}^tU_1 + \frac{1}{\langle u_2 \,|\, u_2 \rangle} \cdot U_2{}^tU_2 \\ &= \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 13 & 9 & 3 & 1 \\ 9 & 7 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 13 & -9 \\ 1 & 3 & -9 & 7 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

⋆

E.
L'espace $E = \mathbb{R}^4$ est muni de sa structure euclidienne canonique.
On considère l'ensemble

$$F = [x + 3y - z + 2t = 0].$$

E - 1. Démontrer que F est un sous-espace de dimension 3.

L'application

$$[(x, y, z, t) \mapsto x + 3y - z + 2t]$$

est une forme linéaire qui n'est pas identiquement nulle sur $\mathbb{R}^4$.
Par conséquent, son noyau, c'est-à-dire l'ensemble F*, est un hyperplan de* $\mathbb{R}^4$.

E - 2. Calculer une base orthogonale de F.

❧ *Il est clair que le vecteur*

$$e_1 = (1, 0, 1, 0)$$

appartient à F.
❧ *Nous cherchons maintenant un vecteur* $e_2 = (x, y, z, t)$ *qui appartienne à* F *:*

$$x + 3y - z + 2t = 0$$

et qui soit orthogonal à e_1 *:*

$$\langle e_1 \,|\, e_2 \rangle = x + z = 0.$$

Autrement dit, nous cherchons une *solution* non nulle *du système suivant.*

$$\begin{cases} x + 3y - z + 2t = 0 \\ x \qquad\quad + z \qquad = 0 \end{cases}$$

Une solution simple *paraît être*

$$e_2 = (0, -2, 0, 3).$$

❧ *Comme* $\dim F = 4 - 1 = 3$*, il nous reste un vecteur à trouver.*
Nous cherchons maintenant un vecteur $e_3 = (x, y, z, t)$ *qui appartienne à* F *et qui soit orthogonal à* e_1 *et à* e_2*, c'est-à-dire une solution non nulle du système suivant.*

$$\begin{cases} x + 3y - z + 2t = 0 & \in F \\ x \qquad\quad + z \qquad = 0 & e_3 \perp e_1 \\ \quad - 2y \qquad + 3t = 0 & e_3 \perp e_2 \end{cases}$$

On simplifie :

$$\begin{cases} \quad 3y - 2z + 2t = 0 \\ x \qquad + z \qquad = 0 \\ \quad -2y \qquad + 3t = 0 \end{cases} \qquad (L_1 \leftarrow L_1 - L_2)$$

et on arrive au système suivant.

$$\begin{cases} \qquad -4z + 13t = 0 \\ x \qquad + z \qquad = 0 \\ \quad -2y \qquad + 3t = 0 \end{cases} \qquad (L_1 \leftarrow 2L_1 + 3L_3)$$

Pour éviter d'introduire des fractions, on pose

$$t = 4u.$$

On en déduit que les solutions de ce système sont les vecteurs

$$(-13u,\ 6u,\ 13u\,, 4u) \qquad (u \in \mathbb{R})$$

et qu'on peut donc choisir

$$e_3 = (13, -6, -13, -4).$$

❧ *C'est fini : la famille*

$$(e_1, e_2, e_3)$$

est une famille de trois vecteurs non nuls et deux à deux orthogonaux de F*, espace de dimension 3, c'est donc une base orthogonale de* F.

REMARQUE.— *Pour éviter d'introduire des fractions (et finir les calculs avec le sourire), il faut s'assurer que* $13t$ *soit divisible par 4 et que* $3t$ *soit divisible par 2. Voilà pourquoi on a posé* $t = 4u$*...*

REMARQUE.— *On peut aussi calculer une base (quelconque) de* F *et appliquer ensuite l'algorithme de Gram-Schmidt pour en déduire une base orthogonale de* F*. C'est sensiblement plus long et pénible que la méthode précédente : aux deux premières étapes, on a pu choisir le vecteur qui nous semblait le plus simple. Une telle prise d'initiative est impossible si on applique un algorithme !*