Produit scalaire — juin 2020

Les questions indexées par des numéros différents sont indépendantes.

1

On considère $E = \mathbb{R}^d$.

1.a. L'application définie par

$$\langle x \mid y \rangle = \sum_{k=1}^{d} 2^k x_k y_k$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^d$.

● Vrai ❍ Faux

On vérifie très facilement que cette application est bilinéaire, symétrique et définie positive.

1.b. L'application définie par

$$\langle x \mid y \rangle = \sum_{k=1}^{d} k x_k y_k$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^d$.

● Vrai ❍ Faux

Idem.

1.c. L'application définie par

$$\langle x \mid y \rangle = \sum_{k=1}^{d} x_k^2 y_k^2$$

- ❑ est un produit scalaire
- ✔ n'est pas bilinéaire
- ❑ n'est pas symétrique
- ❑ n'est pas définie positive

❧ *Pour* $x = y = (1, \dots, 1)$,

$$\langle -x \,|\, y \rangle = \langle x \,|\, -y \rangle = d \neq -d = -\langle x \,|\, y \rangle$$

donc $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ *n'est pas bilinéaire (ni linéaire à gauche, ni linéaire à droite).*

Il ne suffit pas de remarquer que $\langle -x \,|\, y \rangle = \langle x \,|\, y \rangle$ *pour conclure : si* $\langle x \,|\, y \rangle = 0$*, l'égalité précédente ne contredit pas la linéarité ! Il faut donc trouver un contre-exemple pour lequel* $\langle x \,|\, y \rangle \neq 0$.

❧ *En revanche, l'application* $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ *est évidemment symétrique.*
❧ *Et, pour tout* x,

$$\langle x \,|\, x \rangle = \sum_{k=1}^{d} \underbrace{x_k^4}_{\geqslant 0} \geqslant 0$$

avec égalité si, et seulement si, $x_1 = \dots = x_d = 0$*, c'est-à-dire lorsque* x *est le vecteur nul de* $\mathbb{R}^d$*. Donc* $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ *est définie positive.*

2.a. L'application définie par

$$\langle P \mid Q \rangle = \sum_{k=0}^{3} \frac{P(k)Q(k)}{2^k}$$

est un produit scalaire

- ✔ sur $\mathbb{R}_2[X]$
- ✔ sur $\mathbb{R}_3[X]$
- ❏ sur $\mathbb{R}_4[X]$
- ❏ sur $\mathbb{R}[X]$

❧ *Il est clair que* $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ *est bilinéaire, symétrique et positive sur* $\mathbb{R}[X]$.
❧ *Si* $\langle P \mid P \rangle = 0$, *alors*

$$P(0) = P(1) = P(2) = P(3) = 0$$

puisque qu'une somme de réels positifs *est nulle si, et seulement si, chaque terme est nul.*
❧ *Dans* $\mathbb{R}_3[X]$ *et a fortiori dans* $\mathbb{R}_2[X]$, *un polynôme non nul possède au plus trois racines. Dans ces conditions, si* $\langle P \mid P \rangle = 0$, *alors* $P = 0$ *et par conséquent* $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ *est bien un produit scalaire.*
❧ *En revanche, dans* $\mathbb{R}_4[X]$ *se trouve le polynôme*

$$P_0 = X(X-1)(X-2)(X-3)$$

qui n'est pas le polynôme nul et pour lequel on a quand même

$$\langle P_0 \mid P_0 \rangle = 0.$$

Dans ces conditions, $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ *n'est pas un produit scalaire.*

$\boxed{\textbf{2.b.}}$ L'application définie sur $\mathbb{R}_d[X] \times \mathbb{R}_d[X]$ par

$$\langle P \mid Q \rangle = \sum_{k=0}^{d} (-1)^k P(k) Q(k)$$

❏ est un produit scalaire
❏ n'est pas bilinéaire
❏ n'est pas symétrique
✔ n'est pas définie positive

❧ *Il est clair que* $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ *est bilinéaire et symétrique.*
❧ *En général, cette application n'est pas positive (et donc pas définie positive).*
En effet, si $d \geqslant 1$*, pour*

$$P_0 = X(2-x)\cdots(d-X) \in \mathbb{R}_d[X],$$

on a

$$\langle P_0 \mid P_0 \rangle = (-1)^1 P_0(1)^2 = -[(d-1)!]^2 < 0.$$

En revanche, pour $d = 0$,

$$\langle P \mid Q \rangle = P(0)Q(0)$$

et on retrouve ici le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}$ *(à savoir : la multiplication des réels). Dans ce seul cas, très très particulier,* $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ *est un produit scalaire...*

$\boxed{\textbf{2.c.}}$ L'application définie sur $\mathbb{R}_d[X] \times \mathbb{R}_d[X]$ par

$$\langle P \mid Q \rangle = \sum_{k=0}^{d} P(-k) Q(k)$$

❏ est un produit scalaire
❏ n'est pas bilinéaire
✔ n'est pas symétrique
✔ n'est pas définie positive

❧ *Il est clair que* $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ *est bilinéaire.*
❧ *Cette application n'est pas symétrique : pour* $P = 1$ *et* $Q = X$*, on a*

$$\langle P \mid Q \rangle = \sum_{k=0}^{d} k = \frac{d(d+1)}{2} > 0$$

$$\langle Q \mid P \rangle = \sum_{k=0}^{d} -k = -\langle P \mid Q \rangle < 0$$

donc $\langle P \mid Q \rangle \neq \langle Q \mid P \rangle$.
Ici encore, il faut prendre soin de donner un contre-exemple explicite, on ne peut pas se contenter de l'intuition qui nous suggère que

$$\sum_{k=0}^{d} P(-k)Q(k) \neq \sum_{k=0}^{d} P(k)Q(-k).$$

Une suggestion n'est pas une preuve !

❧ *L'application* $\langle \cdot | \cdot \rangle$ *n'est pas positive (et donc pas définie positive). En effet,*

$$\langle X | X \rangle = -\sum_{k=0}^{d} k^2 < 0.$$

Une fois de plus, il faut donner un contre-exemple...
❧ *Contrairement à la question précédente, je n'envisage plus le cas* $d = 0$*, c'est vraiment trop particulier pour que je prenne la peine de m'en soucier (mais je ne l'oublie pas pour autant).*

3

On considère ici l'espace E des fonctions continues sur le segment $[-1, 1]$.

3.a. L'application définie par

$$\langle f \mid g \rangle = \int_{-1}^{1} |f(t)g(t)| \, dt$$

- ❏ est un produit scalaire
- ✔ n'est pas bilinéaire
- ❏ n'est pas symétrique
- ❏ n'est pas définie positive

Il est clair que $\langle \cdot | \cdot \rangle$ *est symétrique et définie positive. En revanche, elle n'est pas bilinéaire : en prenant*

$$f_0 = [t \mapsto 1],$$

on a

$$\langle -f_0 | f_0 \rangle = \langle f_0 | -f_0 \rangle = 2 \neq -2 = -\langle f_0 | f_0 \rangle .$$

3.b. L'application définie par

$$\langle f \mid g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)e^{-t}\,dt$$

- ✔ est un produit scalaire
- ❏ n'est pas bilinéaire
- ❏ n'est pas symétrique
- ❏ n'est pas définie positive

Il est clair que l'application $\langle \cdot|\cdot \rangle$ *est bilinéaire, symétrique et positive.*
Si de plus

$$\langle f|f\rangle = \int_{-1}^{1} \underbrace{[f(t)]^2 e^{-t}}_{\geqslant 0}\,dt = 0,$$

alors l'intégrale sur $[-1,1]$ *d'une fonction* continue et positive *est nulle, donc*

$$\forall\, t \in [-1,1], \quad [f(t)]^2 e^{-t} = 0$$

donc

$$\forall\, t \in [-1,1], \quad f(t) = 0$$

ce qui signifie que f *est bien le vecteur nul de* E.
La continuité de f *est essentielle pour pouvoir conclure ! Sur l'espace des fonctions continues par morceaux sur* $[-1,1]$, *l'application* $\langle \cdot|\cdot \rangle$ *ne serait pas définie positive !*

3.c. L'application définie par

$$\langle f \mid g\rangle = \int_{-1}^{1} f^2(t)g(t)\,dt$$

- ❏ est un produit scalaire
- ✔ n'est pas bilinéaire
- ✔ n'est pas symétrique
- ✔ n'est pas définie positive

On pose

$$f = [t \mapsto 1] \quad \textit{et} \quad g = [t \mapsto t]\,.$$

❧ *L'application* $\langle \cdot|\cdot \rangle$ *linéaire par rapport à la deuxième variable (linéarité de l'intégrale), mais pas linéaire par rapport à la première variable. En effet,*

$$\langle -f|f\rangle = \langle f|f\rangle = 2 \neq -2 = -\langle f|f\rangle\,.$$

❧ *L'application* $\langle \cdot|\cdot \rangle$ *n'est pas symétrique. En effet,*

$$\langle f|g\rangle = \int_{-1}^{1} 1^2 \cdot t\,dt = 0$$

alors que

$$\langle g|f\rangle = \int_{-1}^{1} t^2 \cdot 1\,dt = \frac{2}{3}.$$

❧ *Enfin, l'application* $\langle \cdot | \cdot \rangle$ *n'est pas positive non plus car*

$$\langle -f \,|\, -f \rangle = \int_{-1}^{1} (-1)^3 \, dt = -2 < 0.$$

3.d. L'application définie par

$$\langle f \mid g \rangle = \int_{-1}^{1} |f(t) + g(t)| \, dt$$

❏ est un produit scalaire
✔ n'est pas bilinéaire
❏ n'est pas symétrique
❏ n'est pas définie positive

Il est clair que l'application $\langle \cdot | \cdot \rangle$ *est symétrique et définie positive. Mais elle n'est pas bilinéaire !*
Considérons $f_0 = [t \mapsto 1]$. *Alors*

$$\langle f_0 \,|\, -f_0 \rangle = \int_{-1}^{1} 0 \, dt = 0$$

tandis que

$$-\langle f_0 \,|\, f_0 \rangle = -\int_{-1}^{1} 2 \, dt = -4$$

donc $\langle -f_0 \,|\, f_0 \rangle \neq -\langle f_0 \,|\, f_0 \rangle$.

3.e. L'application définie par

$$\langle f \mid g \rangle = \int_{-1}^{1} f(t) g(t) \sin t \, dt$$

❏ est un produit scalaire
❏ n'est pas bilinéaire
❏ n'est pas symétrique
✔ n'est pas définie positive

Il est clair que $\langle \cdot | \cdot \rangle$ *est bilinéaire et symétrique. En revanche, la fonction*

$$f_0 = [t \mapsto 1]$$

n'est pas identiquement nulle et

$$\langle f_0 \,|\, f_0 \rangle = \int_{-1}^{1} 1^2 \sin t \, dt = 0$$

(par imparité de sin*), donc l'application* $\langle \cdot | \cdot \rangle$ *n'est pas définie positive.*

4

On considère ici l'espace $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique.

4.a. La base canonique de $\mathbb{R}^3$ est une base orthonormée.

● Vrai ❍ Faux

Par définition *même de la structure euclidienne canonique !*

4.b. Dans $\mathbb{R}^3$, la famille

$$\mathscr{B} = \big((2,0,0),(0,-1,0),(0,0,3)\big)$$

✔ est une base
✔ est une base orthogonale
❏ est une base orthonormée
❏ n'est pas une base

On note e_1, e_2 *et* e_3, *les vecteurs de* $\mathscr{B}$.
❧ *Puisque la base canonique est orthonormée,*

$$\begin{aligned}
\langle\, e_1 \,|\, e_1 \,\rangle &= 2^2 + 0^2 + 0^2 = 4\\
\langle\, e_2 \,|\, e_2 \,\rangle &= 0^2 + (-1)^2 + 0^2 = 1\\
\langle\, e_3 \,|\, e_3 \,\rangle &= 0^2 + 0^2 + 3^2 = 9\\
\langle\, e_1 \,|\, e_2 \,\rangle &= 2\times 0 + 0\times(-1) + 0\times 0 = 0\\
\langle\, e_1 \,|\, e_3 \,\rangle &= 2\times 0 + 0\times 0 + 0\times 3 = 0\\
\langle\, e_2 \,|\, e_3 \,\rangle &= 0\times 0 + (-1)\times 0 + 0\times 3 = 0.
\end{aligned}$$

❧ *La famille* $\mathscr{B}$ *compte trois vecteurs non nuls et deux à deux orthogonaux de* $\mathbb{R}^3$, *donc c'est une base orthogonale.*
Seul le deuxième vecteur est unitaire, il ne s'agit donc pas d'une base orthonormée.

4.c. La famille

$$\mathscr{B} = \big((1,1,-1),(2,1,3),(4,-5,-1)\big)$$

est une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$.

● Vrai ❍ Faux

Puisque la base canonique est une base orthonormée,

$$\begin{aligned}
\langle\, e_1 \,|\, e_2 \,\rangle &= 1\times 2 + 1\times 1 + (-1)\times 3 = 0\\
\langle\, e_2 \,|\, e_3 \,\rangle &= 2\times 4 + 1\times(-5) + 3\times(-1) = 0\\
\langle\, e_3 \,|\, e_1 \,\rangle &= 4\times 1 + (-5)\times 1 + (-1)\times(-1) = 0
\end{aligned}$$

donc $\mathscr{B}$ *est une famille de trois vecteurs* non nuls *et* deux à deux orthogonaux, *c'est donc une famille libre de trois vecteurs de* $\mathbb{R}^3$ *et donc une base de* $\mathbb{R}^3$.

$\boxed{\textbf{4.d.}}$ La famille

$$\mathscr{B} = \big((2,-1,-1),(1,1,1),(1,-2,1)\big)$$

est une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$.

❍ Vrai ● Faux

Comme la base canonique est orthonormée,

$$\langle\, e_1 \,|\, e_3 \,\rangle = 2\times 1 + (-1)\times(-2) + (-1)\times 1 = 3$$

donc les trois vecteurs de $\mathscr{B}$ ne sont pas deux à deux orthogonaux.
On peut cependant vérifier que

$$\langle\, e_1 \,|\, e_2 \,\rangle = \langle\, e_2 \,|\, e_3 \,\rangle = 0.$$

Comme e_1 et e_3 ne sont pas colinéaires, la famille (e_1, e_3) est libre. Comme e_2 est non nul et orthogonal à e_1 et à e_3, on a donc

$$e_2 \notin \mathrm{Vect}(e_1, e_3)$$

ce qui prouve que la famille $\mathscr{B}$ est une famille libre de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
C'est donc une base de $\mathbb{R}^3$, mais elle n'est pas orthogonale.

$\boxed{\textbf{4.e.}}$ On pose

$$u = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1) \quad\text{et}\quad v = \frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,1).$$

Pour que la famille (u, v, w) soit une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$, il y a

❏ un seul choix possible

❏ exactement deux choix possibles

✔ une infinité de choix possibles

❏ Mais non, ce n'est pas possible !

❧ *Comme la base canonique est une base orthonormée,*

$$\langle\, u \,|\, v \,\rangle = \frac{1}{3\sqrt{2}}\cdot\big(1\times 2 + 1\times(-1) + (-1)\times 1\big) = 0$$

donc les vecteurs u et v sont orthogonaux. Comme ils ne sont pas nuls, ils forment une base orthogonale du plan

$$F = \mathrm{Vect}(u, v).$$

❧ *Comme $\mathbb{R}^3$ est un espace de dimension finie, on sait que*

$$\mathbb{R}^3 = F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp}$$

et donc que $F^{\perp}$ est une droite vectorielle.
❧ *Quel que soit le vecteur directeur w de $F^{\perp}$ (= pour tout vecteur non nul de $F^{\perp}$), la famille (u, v, w) est une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$.*

Pour que la famille (u, v, w) soit une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$, il y a

❏ un seul choix possible

✔ exactement deux choix possibles

❏ une infinité de choix possibles

❏ Mais non, ce n'est pas possible !

❧ *Comme la base canonique est une base orthonormée,*

$$\|u\|^2 = \frac{1}{3} \cdot (1 + 1 + 1) = 1$$
$$\|v\|^2 = \frac{1}{6} \cdot (4 + 1 + 1) = 1$$

donc (u, v) est une base orthonormée de F.
Il est donc possible de trouver un vecteur w tel que

$$(u, v, w)$$

soit une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ (Théorème de la base orthonormée incomplète).
❧ *Comme précédemment, ce vecteur w doit diriger la droite $F^\perp$, mais en outre il doit être unitaire. Comme une droite possède toujours* deux *vecteurs unitaires (disons w_0 et $-w_0$), il existe exactement deux vecteurs w tels que (u, v, w) soit une base orthonormée.*

REMARQUE.— *Les bases (u, v, w_0) et $(u, v, -w_0)$ sont d'orientations différentes, donc il existe* exactement un *vecteur w tel que (u, v, w) soit une base orthonormée* directe, *il s'agit bien entendu du produit vectoriel*

$$w = u \wedge v.$$

5

L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique.
On considère le plan P d'équation

$$[2x - y + z = 0]$$

et la droite vectorielle D dirigée par le vecteur

$$u = (-1, 1, 3).$$

$\boxed{\textbf{5.a.}}$ La droite D est orthogonale au plan P.

❍ Vrai ● Faux

Les coordonnées du vecteur u vérifient l'équation du plan P, donc la droite D est contenue dans P.
Comme le seul vecteur orthogonal à P qui appartienne à P est le vecteur nul (c'est le seul vecteur orthogonal à lui-même), on en déduit que la droite D n'est pas orthogonale au plan P.

$\boxed{\textbf{5.b.}}$ Il existe une droite vectorielle orthogonale au plan P et à la droite D.

✔ Oui, il en existe une seule

❏ Oui, il en existe une infinité

❏ Non, c'est impossible

❧ *Comme* $\mathbb{R}^3$ *est un espace de dimension finie, on a*

$$\mathbb{R}^3 = P \overset{\perp}{\oplus} P^{\perp}$$

et comme $\dim P = 2$, *on en déduit que*

$$\dim P^{\perp} = 3 - 2 = 1.$$

Donc $P^{\perp}$ *est* une *droite orthogonale à* P.
❧ *Si* Δ *est une droite orthogonale à* P, *alors*

$$\Delta \subset P^{\perp}.$$

Or $\dim \Delta = \dim P^{\perp} = 1$, *donc en fait*

$$\Delta = P^{\perp}.$$

Donc $P^{\perp}$ *est* la seule *droite vectorielle orthogonale à* P.

REMARQUE.— *Le raisonnement précédent s'applique aux droites* vectorielles. *Il existe bien entendu une infinité de droites* affines *qui sont orthogonales à* P *: ce sont toutes les droites parallèles à* $P^{\perp}$.
❧ *Comme la droite* $P^{\perp}$ *est orthogonale à* P *:*

$$\forall\, x \in P^{\perp},\ \forall\, y \in P, \quad \langle\, x \,|\, y \,\rangle = 0$$

et que la droite D *est contenue dans* P *:*

$$\forall\, y \in D, \quad y \in P$$

alors la droite $P^{\perp}$ *est aussi orthogonale à* D *:*

$$\forall\, x \in P^{\perp},\ \forall\, y \in D, \quad \langle\, x \,|\, y \,\rangle = 0.$$

Il existe donc une, et une seule, droite vectorielle orthogonale à P *et à* D *: il s'agit de* $P^{\perp}$.

5.c. Si une droite vectorielle Δ est orthogonale à la droite D, alors elle est orthogonale au plan P.

❏ Oui, bien sûr

✔ Non, pas forcément

❏ C'est compliqué...

L'orthogonal de D *est un plan :*

$$\dim D^{\perp} = \dim \mathbb{R}^3 - \dim D = 2$$

et toute droite vectorielle $\Delta \subset D^{\perp}$ *est, par définition, orthogonale à la droite* D.
l'orthogonal $P^{\perp}$ *du plan* P *est, comme on l'a vu, une droite et pour des raisons de dimension il est impossible que*

$$D^{\perp} \subset P^{\perp}.$$

Par conséquent, une droite orthogonale à D *n'est pas nécessairement orthogonale au plan* P.

REMARQUE.— *On peut répondre plus précisément ! La droite* $P^{\perp}$ *est la seule droite orthogonale à* D *et au plan* P. *Par conséquent, il est raisonnable de conclure que,* en général, *une droite orthogonale à* D *n'est pas orthogonale au plan* P.

5.d. Si une droite vectorielle Δ est orthogonale au plan P, alors elle est orthogonale à la droite D.

✔ Oui, bien sûr

❏ Non, pas forcément

❏ C'est compliqué...

Déjà démontré ! La seule droite vectorielle orthogonale au plan P *est la droite* $P^{\perp}$ *et comme* $D \subset P$, *les droites* $P^{\perp}$ *et* D *sont orthogonales.*

6

L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique.
On considère le vecteur x représenté dans une base $\mathscr{B}$ par

$$X = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

6.a. Si la norme du vecteur x est égale à 5, alors la base $\mathscr{B}$ n'est pas orthonormée.

✔ C'est clair !

❏ C'est possible...

❏ Aucune idée !

Si la base $\mathscr{B}$ *était orthonormée, alors*

$$\|x\|^2 = {}^tXX = 3^2 + 1^2 + (-1)^2 = 11$$

et $\|x\| = \sqrt{11}$.
Par contraposée : si $\|x\| = 5$, *alors la base* $\mathscr{B}$ *n'est pas orthonormée.*

6.b. Si la base $\mathscr{B}$ est orthonormée, alors la norme du vecteur x est égale à $\sqrt{11}$.

✔ C'est clair !

❑ C'est possible...

❑ Aucune idée !

Déjà démontré !

6.c. Si la norme du vecteur x est égale à $\sqrt{11}$, alors la base $\mathscr{B}$ est orthonormée.

❑ C'est clair !

✔ C'est possible...

❑ Aucune idée !

On a démontré la réciproque : si la base $\mathscr{B}$ est orthonormée, alors $\|x\| = \sqrt{11}$.
*De ce seul exemple, on ne peut pas conclure que la base $\mathscr{B}$ n'est pas orthonormée (contrairement au **Q-6a**).*
Mais cela ne suffit pas non plus pour prouver que la base $\mathscr{B}$ est orthonormée ! (La construction d'un contre-exemple est assez technique, je m'abstiens...)

7

L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique. On considère les plans P_1 et P_2 représentés dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ par les équations suivantes.

$$P_1 \;:\; [2x + y - 3z = 0] \qquad P_2 \;:\; [x + y + z = 0]$$

7.a. Le vecteur $u_1 = (2, 1, -3)$ est orthogonal au plan P_1.

● Vrai ❍ Faux

Soit $v = (x, y, z) \in P_1$. Comme la base canonique est une base orthonormée,

$$\langle\, u_1 \,|\, v \,\rangle = 2x + y - 3z$$

et comme $v \in P_1$, on en déduit que $\langle\, u_1 \,|\, v \,\rangle = 0$.
On a démontré que

$$\forall\, v \in P_1, \quad \langle\, u_1 \,|\, v \,\rangle = 0$$

c'est-à-dire que $u_1 \in P_1^{\perp}$.

7.b. Le vecteur $u_2 = (1, 1, 1)$ est orthogonal à u_1.

● Vrai ❍ Faux

Comme la base canonique est une base orthonormée,

$$\langle\, u_1 \,|\, u_2 \,\rangle = 2 \times 1 + 1 \times 1 + (-3) \times 1 = 0$$

donc les vecteurs u_1 et u_2 sont orthogonaux.

$\boxed{\textbf{7.c.}}$ Le plan P_2 est orthogonal au plan P_1.

❍ Vrai ● Faux

On sait que deux sous-espaces F *et* G *sont orthogonaux si, et seulement si,*

$$F \subset G^{\perp}.$$

Or $\dim P_2 = 2$ *et*

$$\dim P_1^{\perp} = \dim \mathbb{R}^3 - \dim P_1 = 1$$

donc l'inclusion

$$P_2 \subset P_1^{\perp}$$

est impossible pour raison de dimension !

8

On considère un espace euclidien E.

$\boxed{\textbf{8.a.}}$ L'espace E est un espace vectoriel de dimension finie.

✔ Oui, bien sûr !

❏ Mais non, jamais !

❏ Ça dépend...

Oui, par ***définition****, un espace euclidien est un espace vectoriel de* dimension finie.

$\boxed{\textbf{8.b.}}$ Si un sous-espace F n'est pas réduit au vecteur nul, alors il contient un vecteur unitaire.

✔ Oui, bien sûr !

❏ Mais non, jamais !

❏ Ça dépend...

Si le sous-espace F *n'est pas réduit au vecteur nul, alors il contient au moins un vecteur* $u \neq 0$. *En particulier* $\|u\| > 0$. *On* doit *savoir que le vecteur*

$$\underbrace{\frac{1}{\|u\|}}_{\in \mathbb{R}_+^*} \cdot \underbrace{u}_{\in F}$$

est unitaire et il appartient à F *(puisque* F*, en tant que sous-espace vectoriel, est stable par combinaison linéaire).*

$\boxed{\textbf{8.c.}}$ Si deux sous-espaces F et G sont orthogonaux, alors

$$E = F \oplus G.$$

❏ Oui, bien sûr !

❏ Mais non, jamais !

✔ Ça dépend...

Deux sous-espaces orthogonaux sont toujours en somme directe, mais rien ne prouve que la somme directe de ces deux sous-espaces soit égale à E.
Plus précisément, puisque F *et* G *sont en somme directe,*

$$E = F \oplus G \iff \dim E = \dim F + \dim G.$$

En particulier, dans $\mathbb{R}^3$*, deux droites orthogonales ne sont pas supplémentaires dans* $\mathbb{R}^3$*...*

8.d. On suppose que

$$E = F \oplus G.$$

Il existe une base de E obtenue en réunissant une base orthonormée $\mathscr{B}_F$ de F et une base orthonormée $\mathscr{B}_G$ de G.

✔ Oui, bien sûr !

❏ Mais non, jamais !

❏ Ça dépend...

Comme F *et* G *sont des espaces de dimension finie, ils admettent chacun une base orthonormée.*
Comme $E = F \oplus G$, *en réunissant une base de* F

$$\mathscr{B}_F = (e_1, \dots, e_r)$$

et une base de G

$$\mathscr{B}_G = (e_{r+1}, \dots, e_d),$$

on obtient une base

$$\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_d)$$

de E *(résultat bien connu dans les espaces vectoriels de dimension finie).*

Cette base est même une base orthonormée de E.

❏ Oui, bien sûr !

❏ Mais non, jamais !

✔ Ça dépend...

❧ *Par hypothèse, on est parti d'une base orthonormée de* F *donc les vecteurs* e_1, ..., e_r *sont unitaires et*

$$\forall\, 1 \leqslant i < j \leqslant r, \quad \langle\, e_i \,|\, e_j \,\rangle = 0.$$

De même, les vecteurs e_{r+1}, ..., e_d *sont tous unitaires et*

$$\forall\, r+1 \leqslant i < j \leqslant d, \quad \langle\, e_i \,|\, e_j \,\rangle = 0.$$

Par conséquent, les vecteurs e_1, ..., e_d *sont tous unitaires, mais rien ne nous prouve que*

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant r < j \leqslant d, \quad \langle\, e_i \,|\, e_j \,\rangle = 0 \qquad (\star)$$

donc la base $\mathscr{B}$ *n'est pas nécessairement orthonormée.*
❧ *Plus précisément, si la base* $\mathscr{B}$ *était orthonormée, alors les sous-espaces*

$$F = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_r) \quad \textit{et} \quad G = \mathrm{Vect}(e_{r+1}, \dots, e_d)$$

seraient orthogonaux, ce qui n'est pas supposé dans cette question.

REMARQUE.— *On rappelle un résultat du cours : la propriété* $(\star)$ ***équivaut*** *au fait que les sous-espaces*

$$\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_r) \quad \textit{et} \quad \mathrm{Vect}(e_{r+1}, \dots, e_d)$$

soient orthogonaux.