

## I

## Équation de Poisson

1. Le **potentiel électrostatique**  $V$  et la **densité volumique de charge**  $\rho$  sont reliées par l'équation de Poisson

$$(1) \quad \Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0.$$

1.1 Dans cette équation,  $\rho$  et  $V$  sont des fonctions de la position seule (et pas du temps, puisqu'on traite un problème d'électrostatique), tandis que  $\varepsilon_0$  est une constante physique, la **permittivité électrique du vide**.

1.2 La fonction  $\rho$  est supposée continue et  $V$  de classe  $\mathcal{C}^2$ . L'équation de Poisson n'a donc de sens que sur une partie ouverte  $\Omega$  de l'espace  $\mathbb{R}^3$  et doit se lire

$$\forall M \in \Omega, \quad \Delta V(M) + \frac{\rho(M)}{\varepsilon_0} = 0.$$

On précise qu'il s'agit d'une *partie ouverte* au sens topologique de *voisinage de chacun de ses points*.

1.3 Lorsque la distribution de charge se réduit à une charge ponctuelle placée en un point  $A$ , la fonction  $V$  est définie sur l'ouvert

$$\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{A\}$$

et la fonction  $\rho$  est identiquement nulle sur  $\Omega$ .

Dans ce cas particulier, ni  $V$ , ni  $\rho$  ne sont définies au point  $A$ .

## I.1 Équation adimensionnée pour un problème plan

2. Dans ce sujet, on étudie l'équation de Poisson (1) en imposant des conditions supplémentaires.

2.1 La donnée  $\rho$  et l'inconnue  $V$  sont des fonctions continues sur un compact  $\mathcal{P}$ . De plus, l'inconnue  $V$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur un ouvert  $\Omega$  dense dans  $\mathcal{P}$  :

$$\overline{\Omega} = \mathcal{P}.$$

En tant qu'ouvert contenu dans  $\mathcal{P}$ , le domaine  $\Omega$  est contenu dans l'intérieur de  $\mathcal{P}$ .

$$\Omega \subset \overset{\circ}{\mathcal{P}}$$

## 2.2 Conditions aux limites de Dirichlet

La différence

$$\mathcal{F} = \mathcal{P} \setminus \Omega = \overline{\Omega} \setminus \Omega = \mathcal{P} \cap \Omega^c$$

est considérée comme la **frontière** du domaine  $\mathcal{P}$ . Cette frontière est fermée (au sens topologique) en tant qu'intersection de deux parties fermées ( $\mathcal{P}$  et  $\Omega^c$ ).

Sur cette frontière  $\mathcal{F}$ , le potentiel  $V$  est imposé par le dispositif expérimental. On traduit cette contrainte par une fonction continue

$$\Phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$$

telle que

$$(2) \quad \forall M \in \mathcal{F}, \quad V(M) = \Phi(M).$$

2.3 La frontière  $\mathcal{F}$  ne doit pas être confondue avec le **bord**  $\partial\mathcal{P}$  au sens topologique :

$$\partial\mathcal{P} = \mathcal{P} \setminus \overset{\circ}{\mathcal{P}} \subset \mathcal{F}.$$

En effet, l'énoncé précise que la frontière  $\mathcal{F}$  peut contenir, outre les points du bord  $\partial\mathcal{P}$ , certains points de  $\overset{\circ}{\mathcal{P}}$  où le potentiel est fixé en raison de la présence d'électrodes.

3. Une bonne modélisation mathématique repose sur des équations aussi simples que possible en tenant compte de tous les paramètres physiques possibles.

3.1 Tout carré  $ABCD$  du plan est l'image du carré

$$K_0 = [0, 1] \times [0, 1]$$

par une similitude directe  $s$  (composée d'une rotation et d'une homothétie affines).

$$(3) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \in ABCD \iff \exists (X, Y) \in K_0, \quad (x, y) = s(X, Y)$$

3.2 Par conséquent, si on sait résoudre l'équation de Poisson avec les conditions de Dirichlet sur le carré de référence  $K_0$ , on sait aussi résoudre ce problème sur un carré quelconque du plan : la fonction  $g(X, Y)$  est une solution sur  $K_0$  si, et seulement si, la fonction  $f(x, y) = (g \circ s^{-1})(x, y)$  est une solution sur  $ABCD$ .

3.3 Dans la question suivante, on réduit le carré  $[0, L] \times [0, L]$  à  $K_0$  et on intègre la constante  $\varepsilon_0$  aux données. Ainsi, tous les paramètres du problème étudié sont pris en compte dans l'expression de la seule fonction  $\rho'$ .

Q 3. L'application  $s$  définie par

$$\forall (X, Y) \in K_0, \quad s(X, Y) = (LX, LY)$$

est une homothétie qui transforme le carré de référence  $K_0$  en  $K = [0, L] \times [0, L]$ .

• Le potentiel  $V$  peut donc être représenté par une fonction mathématique  $f(x, y)$  définie sur  $K$  et par une fonction mathématique  $g(X, Y)$  définie sur  $K_0$ .

Ces deux fonctions sont reliées par les formules suivantes.

$$\forall (X, Y) \in K_0, \quad g(X, Y) = (f \circ s)(X, Y) \quad \forall (x, y) \in K, \quad f(x, y) = (g \circ s^{-1})(x, y)$$

• D'après la règle de la chaîne,

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial X} &= \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial X} = L \cdot \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial Y} &= \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial Y} = L \cdot \frac{\partial V}{\partial y} \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} &= L \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( L \cdot \frac{\partial V}{\partial x} \right) = L^2 \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} &= L \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left( L \cdot \frac{\partial V}{\partial y} \right) = L^2 \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \end{aligned}$$

et par conséquent l'équation d'inconnue  $V(x, y) = f(x, y)$

$$\forall (x, y) \in [0, L] \times [0, L], \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}(x, y) + \frac{\rho(x, y)}{\varepsilon_0} = 0$$

équivalent à l'équation d'inconnue  $V(X, Y) = g(X, Y) = f[s(X, Y)]$

$$\forall (X, Y) \in [0, 1] \times [0, 1], \quad \frac{1}{L^2} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial X^2}(X, Y) + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2}(X, Y) \right) + \frac{\rho[s(X, Y)]}{\varepsilon_0} = 0$$

c'est-à-dire

$$(4) \quad \forall (X, Y) \in [0, 1] \times [0, 1], \quad \frac{\partial^2 V}{\partial X^2}(X, Y) + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2}(X, Y) + \rho'(X, Y) = 0$$

avec

$$(5) \quad \forall (X, Y) \in [0, 1] \times [0, 1], \quad \rho'(X, Y) = \frac{L^2 \rho(LX, LY)}{\varepsilon_0}.$$

### I.3 Discrétisation

4. Dans la suite du sujet, on étudie l'équation de Poisson adimensionnée sur le compact  $\mathcal{P} = K_0$ . On rappelle que, pour nous, une solution  $V = V(X, Y)$  est une fonction continue sur  $\mathcal{P}$  et de classe  $\mathcal{C}^2$  sur un ouvert  $\Omega \subset \mathcal{P}$ , les valeurs de  $V(X, Y)$  étant imposées sur la frontière

$$\mathcal{F} = \mathcal{P} \setminus \Omega = \mathcal{P} \cap \Omega^c.$$

• Pour résoudre numériquement (de manière approchée) l'équation de Poisson, on va définir un **maillage** du compact  $K_0$  en subdivisant le segment  $[0, 1]$  en  $N$  parties de même longueur.

• Le **pas** de la discrétisation est défini par

$$h = 1/N.$$

Quels que soient les entiers  $0 \leq i, j \leq N$ , on pose  $X_i = ih$  et  $Y_j = jh$ .

• On parle ici de **discrétisation** parce qu'au lieu d'étudier le potentiel  $V$  sur l'ensemble continu  $[0, 1] \times [0, 1]$ , on l'étudie seulement sur l'ensemble fini

$$\{(X_i, Y_j)\}_{0 \leq i, j \leq N}.$$

Évidemment, on suppose que le pas  $h$  est assez petit pour que la résolution du problème discrétisé donne une image assez précise de la solution du problème continu initial.

• On notera  $V(i, j)$ , la valeur approchée du potentiel  $V$  calculé au point  $(X_i, Y_j)$ .

### 5. Développement limité à l'ordre 2

Le sujet est vraiment léger sur les détails mathématiques, la régularité des fonctions étudiées n'est jamais évoquée.

5.1 Si la fonction  $V = V(X, Y)$  est, comme nous l'avons supposé, une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  sur l'ouvert  $\Omega$ , alors elle admet un développement limité à l'ordre deux au voisinage de chaque point  $M_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$  et ce développement limité est donné par la formule suivante.

Pour tout déplacement  $\mathbf{u} = (\delta X, \delta Y)$  assez petit,

$$\begin{aligned} V(M_0 + \mathbf{u}) &= V(M_0) + \frac{\partial V}{\partial X}(M_0) \cdot \delta X + \frac{\partial V}{\partial Y}(M_0) \cdot \delta Y \\ &\quad + \frac{(\delta X)^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial X^2}(M_0) + \frac{(\delta Y)^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2}(M_0) + \delta X \cdot \delta Y \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial X \partial Y}(M_0) + o(\|\mathbf{u}\|^2) \end{aligned}$$

(pour une norme quelconque sur  $\mathbb{R}^2$ ).

5.2 Il semble que le sujet ait une idée un peu différente de ce que représente un développement limité à l'ordre deux.

Pourquoi pas ? D'après la formule de Taylor, il suffit que la fonction  $V$  soit de classe  $\mathcal{C}^3$  sur  $\Omega$  pour s'assurer que le reste est en  $\mathcal{O}(\|\mathbf{u}\|^3)$  au lieu de  $o(\|\mathbf{u}\|^2)$  et on peut démontrer que la fonction  $V$  est de classe  $\mathcal{C}^3$  sur  $\Omega$  dès lors que la densité volumique  $\rho$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\Omega$ .

Q 4. On applique quatre fois la formule du développement limité à l'ordre deux au voisinage du point  $M_0 = (X_i, Y_j)$  avec les déplacements suivants :

$$\mathbf{u} = (h, 0), \quad \mathbf{u} = (-h, 0), \quad \mathbf{u} = (0, h), \quad \mathbf{u} = (0, -h).$$

Par homogénéité de la norme, la norme de  $\mathbf{u}$  est de la forme  $Cte \cdot |h|$  pour chacun de ces quatre vecteurs, donc les quatre restes sont  $o(h^2)$  – ou  $\mathcal{O}(h^3)$  si on adopte la convention de l'énoncé.

En sommant ces quatre développements limités, on obtient

$$V(X_i + h, Y_j) + V(X_i - h, Y_j) + V(X_i, Y_j + h) + V(X_i, Y_j - h) = 4V(X_i, Y_j) + h^2 \left( \frac{\partial^2 V}{\partial X^2}(X_i, Y_j) + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2}(X_i, Y_j) \right) + o(h^2)$$

et donc, en divisant par  $h^2 > 0$ ,

$$\forall 1 \leq i, j < N, \quad \Delta V(X_i, Y_j) \underset{h \rightarrow 0}{=} \frac{V(X_i + h, Y_j) + V(X_i - h, Y_j) + V(X_i, Y_j + h) + V(X_i, Y_j - h) - 4V(X_i, Y_j)}{h^2} + o(1).$$

6. Il est utile de bien comprendre le sens de la formule précédente.

6.1 La discrétisation du problème consiste à prendre une valeur  $h > 0$  comme unité de longueur et cette valeur est *fixée*, elle ne tend pas vers 0 !

Néanmoins, pour que la discrétisation du problème ait une utilité, il faut fixer la valeur du pas  $h$  assez petite devant une longueur caractéristique du problème, de manière à pouvoir raisonnablement considérer  $h$  comme une *petite longueur*.

6.2 Dans ces conditions, le développement limité calculé ci-dessus nous assure que la différence entre la valeur  $\Delta V(X_i, Y_j)$  du laplacien et l'expression

$$\frac{V(X_i + h, Y_j) + V(X_i - h, Y_j) + V(X_i, Y_j + h) + V(X_i, Y_j - h) - 4V(X_i, Y_j)}{h^2}$$

devient négligeable quand le pas  $h$  est choisi assez petit (devant la longueur caractéristique).

Le développement limité de l'énoncé, où le reste est en  $\mathcal{O}(h)$ , nous assure que cette différence est du même ordre de grandeur que le pas  $h$  devant la longueur caractéristique.

6.3 Il convient cependant de rester raisonnable ! Plus le pas  $h$  est petit, plus l'entier  $N = 1/h$  est grand.

Il faut donc respecter un équilibre entre la **précision** de la discrétisation (qui augmente quand le pas  $h$  diminue) et la **complexité** de la résolution, qui explose avec le nombre  $(N + 1)^2 \sim 1/h^2$  de mailles.

Q 5. L'équation de Poisson discrétisée est obtenue en remplaçant le laplacien de  $V$  par son expression approchée. On a démontré que, lorsque le pas  $h$  de la discrétisation est assez petit,

$$\frac{V(X_i + h, Y_j) + V(X_i - h, Y_j) + V(X_i, Y_j + h) + V(X_i, Y_j - h) - 4V(X_i, Y_j)}{h^2} \approx -\frac{L^2 \rho(X_i, Y_j)}{\varepsilon_0}.$$

Nous allons donc considérons le problème discret

$$\frac{V(X_i + h, Y_j) + V(X_i - h, Y_j) + V(X_i, Y_j + h) + V(X_i, Y_j - h) - 4V(X_i, Y_j)}{h^2} + \frac{L^2 \rho(X_i, Y_j)}{\varepsilon_0} = 0$$

c'est-à-dire

$$(6) \quad V(i + 1, j) + V(i - 1, j) + V(i, j + 1) + V(i, j - 1) - 4V(i, j) + \rho''(i, j) = 0$$

où on a posé

$$(7) \quad \rho''(i, j) = \frac{h^2 L^2 \rho(X_i, Y_j)}{\varepsilon_0}.$$

7. Aucun quantificateur dans les expressions précédentes ? Rassurez-vous, je ne suis pas souffrant !

7.1 On a calculé une approximation du laplacien de  $V$  en supposant que  $V$  était de classe  $\mathcal{C}^2$  (voire  $\mathcal{C}^3$ ), donc en supposant implicitement que le point

$$M_{i,j} = (X_i, Y_j)$$

appartenait à l'ouvert  $\Omega$ .

Il faudra donc se souvenir, au moment des applications, que les relations (6) et (7) n'ont de sens que pour les couples  $(i, j)$  tels que le point  $M_{i,j}$  appartienne à l'ouvert  $\Omega$ .

7.2 Pour les autres couples  $(i, j)$ , qui correspondent à des points de la frontière  $\mathcal{F}$ , le potentiel  $V(i, j)$  sera fixé par les conditions aux limites de Dirichlet.

$$(8) \quad V(i, j) = \Phi(X_i, Y_j)$$

#### I.4 Résolution

8. Le problème discrétisé (6) et les conditions aux limites de Dirichlet (8) constituent un système linéaire de  $(N + 1)^2$  équations (une équation pour chaque point  $M_{i,j}$  dans  $\Omega$  et une équation pour chaque point  $M_{i,j}$  dans  $\mathcal{F}$ ) en  $(N + 1)^2$  inconnues (les valeurs de  $V(i, j)$  pour  $0 \leq i, j \leq N$ ).

Nous admettons que ce système est un système de Cramer.

Quelle que soit la densité volumique  $\rho$ , le problème discrétisé {(6), (8)} admet donc une, et une seule, solution

$$(V(i, j))_{0 \leq i, j \leq N}$$

et nous admettons aussi que cette solution donne une approximation convenable du problème continu {(1), (2)}.

#### 9. Méthode de Jacobi

L'entier  $N$  étant assez grand et le système à résoudre {(6), (8)} étant très particulier, ce n'est pas une bonne idée de calculer la solution du système par l'algorithme du pivot.

**9.1** Les conditions de Dirichlet imposent un certain nombre de coefficients de la solution  $V \in \mathfrak{M}_{N+1}(\mathbb{R})$ . Pour tous les autres coefficients de  $V$ , la relation (6) incite à considérer  $V(i, j)$  comme la somme de la moyenne des valeurs voisines et d'une perturbation :

$$(9) \quad V(i, j) = \underbrace{\frac{V(i+1, j) + V(i-1, j) + V(i, j+1) + V(i, j-1)}{4}}_{\text{moyenne des valeurs voisines}} + \underbrace{\frac{\rho''(i, j)}{4}}_{\text{perturbation}}.$$

**9.2** Le principe de la méthode de Jacobi consiste à partir d'une matrice  $V_0 \in \mathfrak{M}_{N+1}(\mathbb{R})$  assez arbitraire et à la régulariser par des calculs successifs de moyennes.

On admet que ces régularisations successives définissent une suite convergente de matrices  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et que la limite de cette suite est la matrice  $V$ , unique solution du problème discret  $\{(6), (8)\}$ .

### 9.3 Initialisation

La première matrice  $V_0 \in \mathfrak{M}_{N+1}(\mathbb{R})$  est définie par les conditions aux limites :

$$\forall (i, j) \in \mathcal{F}, \quad V_0(i, j) = \Phi(i, j)$$

et par des valeurs arbitraires sur l'ouvert  $\Omega$  :

$$\forall (i, j) \in \Omega, \quad V_0(i, j) = 0.$$

### 9.4 Itération

Après avoir calculé une matrice  $V_k \in \mathfrak{M}_{N+1}(\mathbb{R})$ , on calcule la matrice  $V_{k+1}$  en imposant les mêmes conditions aux limites :

$$(10) \quad \forall (i, j) \in \mathcal{F}, \quad V_{k+1}(i, j) = \Phi(i, j) = V_k(i, j)$$

et en s'inspirant de la relation (9) pour les autres valeurs :

$$(11) \quad \forall (i, j) \in \Omega, \quad V_{k+1}(i, j) = \frac{V_k(i+1, j) + V_k(i-1, j) + V_k(i, j+1) + V_k(i, j-1)}{4} + \frac{\rho''(i, j)}{4}.$$

### 9.5 Arrêt

Informatiquement, on ne peut calculer qu'un nombre fini de matrices  $V_k$  et il faut donc imposer un critère d'arrêt. Pour tout  $k \geq 1$ , on pose

$$(12) \quad e_k = \sqrt{\frac{1}{N^2} \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N [V_{k+1}(i, j) - V_k(i, j)]^2} = \frac{\|V_{k+1} - V_k\|_2}{N}$$

où  $\|\cdot\|_2$  est la norme euclidienne canonique sur  $\mathfrak{M}_{N+1}(\mathbb{R})$ .

On décide que l'itération sera arrêtée dès que l'écart  $e_k$  sera inférieur à un seuil  $\varepsilon > 0$  fixé arbitrairement.

REMARQUE.— Le facteur  $1/N$  permet de considérer la valeur de  $e_k$  comme une **erreur moyenne** et donc de rendre cette valeur assez peu sensible au choix du pas  $h$ .

On peut donc appliquer la méthode de Jacobi avec le même seuil  $\varepsilon$  pour différentes valeurs de  $N$ .

## Implémentation informatique

**Q 6.** Si le couple  $(i, j)$  repère un point de la frontière  $\mathcal{F}$ , on applique la relation (10). Dans le cas contraire, le couple  $(i, j)$  repère un point de l'ouvert  $\Omega$  et on applique alors la relation (11).

```
def nouveau_potentiel(V, rhos, frontiere, i, j):
    if frontiere(i, j):
        valeur = V[i, j]
    else:
        valeur = (V[i+1, j]+V[i-1, j]+V[i, j-1]+V[i, j+1]+rhos[i, j])/4
    return valeur
```

REMARQUE.— La valeur retournée par la fonction `frontiere` est un booléen : soit `True`, soit `False`. Pour savoir à quel type de point correspond le couple  $(i, j)$  ( $M \in \mathcal{F}$  ou  $M \in \Omega$ ), il suffit d'évaluer ce booléen, il est inutile de le comparer à `True` !

On doit donc éviter d'écrire le test sous la forme

```
if frontiere(i, j)==True:
```

sous peine de paraître très, très naïf.

**Q 7.** En général (c'est-à-dire lorsque  $(i, j)$  repère un point de l'ouvert  $\Omega$ ), la valeur de  $V_{k+1}(i, j)$  se déduit des valeurs précédentes des quatres points voisins  $V_k(i \pm 1, j)$  et  $V_k(i, j \pm 1)$ .

De même, selon la relation (11), l'ancienne valeur  $V_k(i, j)$  doit servir à calculer la nouvelle valeur de  $V_{k+1}$  aux quatre points voisins :  $V_{k+1}(i \pm 1, j)$  et  $V_{k+1}(i, j \pm 1)$ . Quelle que soit la manière de parcourir le tableau  $V$ , il est impossible de remplacer  $V_k(i, j)$  par  $V_{k+1}(i, j)$  et d'appliquer la relation (11) pour tous les points de  $\Omega$ .

Il faut donc affecter les nouvelles valeurs  $V_{k+1}(i, j)$  à un tableau auxiliaire et recopier ce tableau dans le tableau initial après le calcul de tous les  $V_{k+1}(i, j)$ .

**Q 8.** On écrit une fonction annexe pour calculer l'écart  $e_k$ . On suppose que les deux arguments sont des tableaux numpy de même format et on tire parti des opérations sur les tableaux numpy.

```
def erreur(V, V_1):
    nb_lig, nb_col = V.shape
    N = nb_lig * nb_col
    ecart_quad = np.sqrt(np.sum((V_1 - V)**2))
    ecart_quad_moy = ecart_quad/N
    return ecart_quad_moy
```

Pour calculer  $V_{k+1}$ , on recopie le tableau  $V_k$  dans un tableau annexe qui va servir à calculer les nouvelles valeurs au moyen de la fonction `nouveau_potentiel` définie plus haut, ces nouvelles valeurs sont affectées au tableau initial.

```
def itere_J(V, rhos, frontiere):
    format = V.shape
    V_0 = V.copy()
    nb_lig, nb_col = format
    for i in range(nb_lig):
        for j in range(nb_col):
            V[i,j] = nouveau_potentiel(V_0, rhos, frontiere, i, j)
    err = erreur(V, V_0)
    return err
```

**Q 9.** À chaque exécution, la fonction précédente modifie les valeurs du tableau  $V$  (qui passe de  $V_k$  à  $V_{k+1}$ ) et on veut que cette fonction s'applique tant que l'erreur  $e_k$  qu'elle retourne dépasse un certain seuil arbitrairement choisi.

Dans une boucle `while`, le test est effectué avant que le corps de la boucle ne soit exécuté. Pour entrer dans la boucle, il faut donc – exécuter une première fois le code de la boucle pour calculer la valeur initiale  $e_0$  de l'erreur

```
def poisson(f_iter, V, rhos, frontiere, eps):
    err = f_iter(V, rhos, frontiere)
    while (err > eps):
        err = f_iter(V, rhos, frontiere)
```

– ou attribuer une valeur fictive à l'erreur pour être sûr d'exécuter au moins une fois le code de la boucle, ce qui est plus élégant.

```
def poisson(f_iter, V, rhos, frontiere, eps):
    err = 2*eps
    while (err > eps):
        err = f_iter(V, rhos, frontiere)
```

Dans les deux cas, la boucle `while` s'arrête lorsque l'erreur calculée devient inférieure au seuil  $\epsilon$  et le tableau  $V$  contient alors une valeur approchée de la solution.

## I.5 Améliorations

### Méthode de Gauss–Seidel

10. On conserve le principe de l’algorithme de Jacobi pour lequel le tableau  $V$  des potentiels est balayé selon les indices  $i$  et  $j$  croissants.

Ainsi, au moment de calculer  $V_{k+1}(i, j)$ , on a déjà calculé  $V_{k+1}(i-1, j)$  et  $V_{k+1}(i, j-1)$ , mais pas encore  $V_{k+1}(i+1, j)$ , ni  $V_{k+1}(i, j+1)$ .

Le schéma de Jacobi (11) peut donc être remplacé par le nouveau schéma suivant.

$$(13) \quad \forall (i, j) \in \Omega, \quad V_{k+1}(i, j) = \frac{V_k(i+1, j) + V_k(i-1, j) + V_k(i, j+1) + V_k(i, j-1)}{4} + \frac{\rho''(i, j)}{4}$$

On peut démontrer que ce schéma converge un peu plus rapidement que le schéma de Jacobi.

Q 10. Par construction même de l’algorithme, il n’est pas nécessaire de recopier le contenu du tableau  $V_k$  pour calculer le tableau  $V_{k+1}$  et le code de la fonction `nouveau_potentiel` peut être conservé en l’état : il suffit d’appliquer cette fonction au tableau  $v$  puisque, au moment de calculer  $V_{k+1}(i, j)$ , ce tableau  $v$  contient les valeurs nécessaires calcul de (13).

Q 11. Il suffit d’adapter légèrement le code de la fonction `itere_J`. Le test d’arrêt étant ce qu’il est, il faut malgré tout conserver une copie du tableau précédent pour calculer l’écart entre le nouveau tableau et l’ancien tableau et finalement, on n’y gagne pas beaucoup !

```
def itere_GS(V, rhos, frontiere):
    nb_lig, nb_col = V.shape
    V_0 = V.copy()      # Ne servira qu'au calcul de l'erreur
    for i in range(nb_lig):
        for j in range(nb_col):
            V[i,j] = nouveau_potentiel(V, rhos, frontiere, i, j)
    err = erreur(V, V_0)
    return err
```

### Méthode de Gauss–Seidel adaptative

11. Les schémas de Jacobi et de Gauss-Seidel expriment  $V_{k+1}(i, j)$  en fonction des valeurs de  $V_k$  autour du point  $(i, j)$  mais pas de la valeur  $V_k(i, j)$ .

11.1 La **méthode de sur-relaxation** (*Successive Over Relaxation method*) consiste à exprimer  $V_{k+1}(i, j)$  comme une combinaison convexe de  $V_k(i, j)$  et de la valeur donnée par le schéma de Gauss-Seidel.

11.2 On introduit un **paramètre de relaxation**  $\omega$  et on pose

$$(14) \quad V_{k+1}(i, j) = (1 - \omega)V_k(i, j) + \omega \cdot \frac{V_k(i+1, j) + V_{k+1}(i-1, j) + V_k(i, j+1) + V_{k+1}(i, j-1) + \rho''(i, j)}{4}.$$

11.3 Nous admettrons que

- cette méthode converge pour  $0 < \omega < 2$  ;
- qu’elle converge plus rapidement que la méthode de Gauss-Seidel pour  $1 < \omega < 2$
- et qu’il existe une valeur optimale de  $\omega$  pour laquelle on obtient une valeur approchée du résultat à  $\varepsilon$  près en moyenne avec un nombre d’itérations en  $\mathcal{O}(N)$ .

On peut démontrer que, pour le problème étudié ici, cette valeur optimale de  $\omega$  est

$$\omega_{\text{opt}} = \frac{2}{1 + \pi/N}.$$

Q 12. Le plus simple (et aussi le plus facile à lire) est d’utiliser la fonction `nouveau_potentiel` déjà codée.

```
def nouveau_potentiel_SOR(V, rhos, frontiere, i, j, omega):
    return (1-omega)*V[i,j]+omega*nouveau_potentiel(V, rhos, frontiere, i, j)
```

- Q 13.** On récupère la valeur de l'entier  $N$  sur la taille du tableau  $V$ . On peut alors en déduire la valeur optimale de  $\omega$ . Pour le reste, on conserve la structure générale des fonctions `itere_J` et `itere_GS`. Une fois encore, on est obligé de conserver une copie de l'ancien tableau  $V$  pour calculer l'écart entre l'ancienne et la nouvelle valeur.

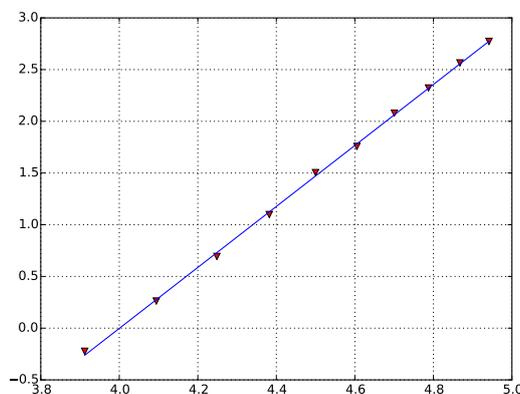
```
def itere_SOR(V, rhos, frontiere):
    nb_lig, nb_col = V.shape
    N = nb_lig - 1
    omega = 2/(1+np.pi/N)
    V_0 = V.copy()
    for i in range(nb_lig):
        for j in range(nb_col):
            V[i,j] = nouveau_potentiel_SOR(V, rhos, frontiere, i, j, omega)
    err = erreur(V, V_0)
    return err
```

- Q 14.** À chaque itération, il faut calculer les  $(N + 1)^2 = \mathcal{O}(N^2)$  coefficients du tableau  $V$ , ces calculs ayant à peu près tous le même coût. Pour  $\omega = \omega_{opt}$ , on sait que le nombre d'itérations est en  $\mathcal{O}(N)$ , donc le coût total du schéma SOR est en  $\mathcal{O}(N^3)$ .
- Lorsque  $N$  double (de 50 à 100, de 60 à 120, de 70 à 140), il semble bien que, d'après le graphe  $T = f(N)$ , la durée d'exécution soit multipliée par  $8 = 2^3$ , ce qui confirme l'ordre de grandeur qu'on vient d'estimer.
  - Pour  $N = 100$ , la durée d'exécution est de l'ordre de 6 secondes.
- Pour  $N = 1000 = 10 \times 100$ , la durée d'exécution devrait donc être de l'ordre de  $6 \cdot 10^3$  secondes, soit environ 1h40.
- La résolution du problème posé par l'algorithme du pivot réclamerait elle aussi  $\mathcal{O}(N^3)$  opérations. Du point de vue de la durée d'exécution, la résolution approchée par la méthode SOR est d'une efficacité analogue à la résolution classique du système linéaire.

**12.** Une relation de la forme  $T = K \cdot N^a$  se traduit par  $\ln T = a \ln N + \ln K$ . Il peut être intéressant de conforter les indications précédentes en effectuant une régression linéaire sur le modèle  $\ln T = a \ln N + b$ .

On peut extraire les données suivantes (très approximatives) du graphe fourni par l'énoncé. On superpose le nuage de points et la droite de régression calculée pour s'assurer visuellement que l'approximation est satisfaisante.

$N$	$T$
50	0,8
60	1,3
70	2,0
80	3,0
90	4,5
100	5,8
110	8,0
120	10,2
130	13,0
140	16,0



```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.stats import linregress as linregress

Lx = np.log(np.arange(50, 150, 10))
y = [0.8, 1.3, 2, 3, 4.5, 5.8, 8, 10.2, 13, 16]
a, b, r, p_v, sigma = linregress(Lx, np.log(y))
plt.plot(Lx, np.log(y), 'rv')
plt.plot(Lx, a*Lx+b, 'b')
plt.grid()
```

La valeur du coefficient  $a$  est proche de 3 (environ 2,95), ce qui confirme notre estimation précédente.

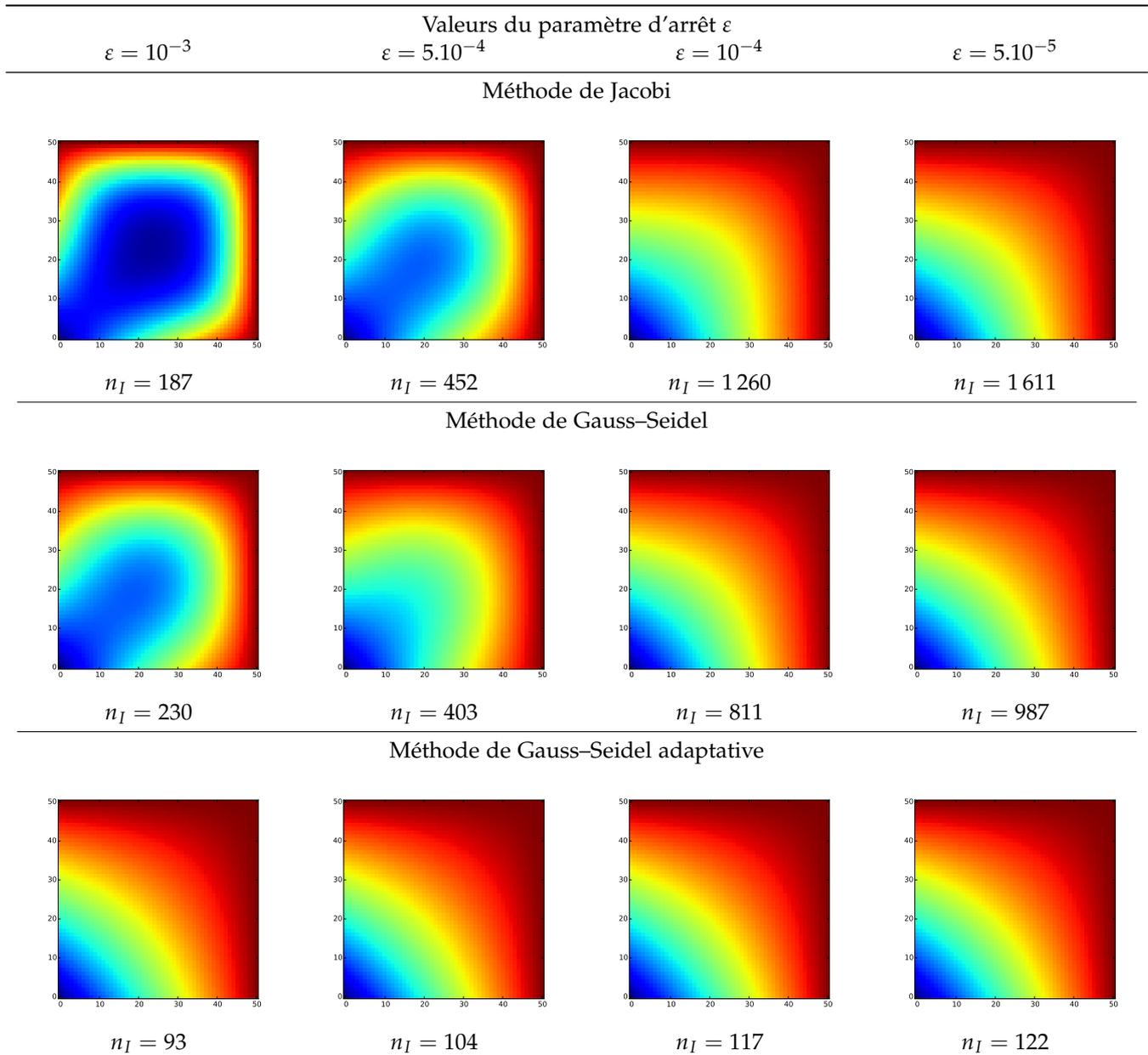


FIGURE 3.1: Comparaison des trois méthodes pour différentes valeurs du paramètre d'arrêt

### Critique de la condition d'arrêt

13. On n'a pas étudié la vitesse de convergence du procédé, on ne sait donc pas pour quelles valeurs du paramètre  $\varepsilon$  le tableau calculé nous donnera une approximation convenable de la solution cherchée.

13.1 Si l'algorithme converge rapidement, on peut imaginer que les erreurs  $\|V_{k+1} - V_k\|_2$  et  $\|V_\infty - V_k\|_2$  sont assez proches. Dans ce cas, notre condition d'arrêt est recevable.

13.2 Si au contraire l'algorithme converge lentement, il est possible que l'erreur  $\|V_{k+1} - V_k\|_2$  soit bien plus grande que l'erreur  $\|V_\infty - V_k\|_2$ . Nous avons choisi d'arrêter les calculs dès que  $\|V_{k+1} - V_k\|_2$  devient inférieure à un seuil  $\varepsilon$  et il est possible dans ce cas que l'erreur  $\|V_\infty - V_k\|_2$  (= l'erreur qui nous intéresse, celle qui sépare la valeur approchée de la valeur exacte) soit bien plus grande que  $\varepsilon$ .

On aura alors une idée fautive du résultat, non pas du fait de l'algorithme utilisé mais à cause du test d'arrêt choisi...

13.3 La figure suivante nous montre les résultats obtenus par les trois méthodes pour différentes valeurs du paramètre  $\varepsilon$ .

Le nombre d'itérations effectuées avant que  $\|V_{k+1} - V_k\|_2 < \varepsilon$  est noté  $n_I$ .

14. On constate que les trois méthodes aboutissent au même résultat : on peut donc se fier au résultat trouvé. On voit que le résultat définitif est obtenu plus ou moins rapidement : à peine une centaine d'itérations pour la méthode adaptative ; un millier pour la méthode de Gauss-Seidel et presque le double pour la méthode de Jacobi. Plus grave, avec la valeur  $\varepsilon = 10^{-3}$  comme condition d'arrêt, on obtient un résultat tout à fait satisfaisant avec la méthode adaptative et des résultats ahurissants avec les deux autres méthodes. Plus que la méthode choisie pour itérer les calculs, c'est donc notre façon d'arrêter l'algorithme qui doit être remise en question !

### I.6 Détermination du champ électrique

Q 15. Par définition,  $\mathbf{E} = -\nabla V$ , c'est-à-dire

$$\mathbf{E}(x, y) = (E_x, E_y) = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}(x, y), \frac{\partial V}{\partial y}(x, y)\right).$$

Rappelons que le tableau  $V$  est une discrétisation de la fonction  $V(x, y)$  avec la correspondance :

$$V(i, j) \leftrightarrow V\left(\underbrace{\frac{i}{N} \cdot L}_x, \underbrace{\frac{j}{N} \cdot L}_y\right)$$

et donc, d'après la formule de Taylor,

$$V(i+1, j) - V(i, j) \approx \frac{L}{N} \cdot \frac{\partial V}{\partial x}\left(\frac{iN}{L}, \frac{jN}{L}\right), \quad V(i, j+1) - V(i, j) \approx \frac{L}{N} \cdot \frac{\partial V}{\partial y}\left(\frac{iN}{L}, \frac{jN}{L}\right).$$

Les tableaux  $E_x$  et  $E_y$  qui sont les discrétisations analogues des deux composantes du champ  $\mathbf{E}$  peuvent donc être définies à partir des approximations :

$$(15) \quad E_x(i, j) \approx \frac{N}{L} \cdot (V(i, j) - V(i+1, j)), \quad E_y(i, j) \approx \frac{N}{L} \cdot (V(i, j) - V(i, j+1)).$$

• On a ainsi exprimé des valeurs approchées des composantes  $E_x$  et  $E_y$  du champ  $\mathbf{E}$  en fonction du tableau  $V$  et du pas de maillage  $L/N$  (qui n'est pas le pas normalisé  $h = L/N$ ).

On peut d'ailleurs se demander si les auteurs du sujet ont veillé à la cohérence des notations : dans les applications II.1 et II.2, le pas  $h$  est égal à  $L/N$  !

• Comme toujours, on a pris soin de ne pas indiquer par des quantificateurs le domaine de validité des relations (15)... D'un point de vue mathématique, la fonction  $V$  étant de classe  $\mathcal{C}^1$  sur l'ouvert  $\Omega$ , il serait anormal de calculer ses dérivées partielles en un point de la frontière  $\mathcal{F}$ . En particulier, le calcul de  $E_x(i, j)$  et  $E_y(i, j)$  pour  $i = N$  ou pour  $j = N$ , qui reposerait sur  $V(N+1, j)$  et  $V(i, N+1)$  (valeurs qui ne sont pas définies), serait hors-sujet !

Cela dit, si on tient à ce que les tableaux  $E_x$  et  $E_y$  aient une valeur définie pour chaque couple  $(i, j)$  (et pas seulement pour les couples qui correspondent aux points de l'ouvert  $\Omega$ ), il est raisonnable de poser

$$\forall 0 \leq i \leq N, \quad \begin{cases} E_x(i, N) = E_x(i, N-1) \\ E_y(i, N) = E_y(i, N-1) \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall 0 \leq j \leq N, \quad \begin{cases} E_x(N, j) = E_x(N-1, j) \\ E_y(N, j) = E_y(N-1, j) \end{cases}$$

puisque le champ  $\mathbf{E}$  est, par hypothèse, continu sur le domaine  $\mathcal{P}$ .

## II

## Études de cas

## Changement de convention

15. Dans la partie théorique, le sujet considère que les indices 0 à  $N$  (inclus) correspondent à des longueurs comprises entre 0 et 1, puisqu'on travaille avec les variables d'espace  $X$  et  $Y$  qui sont sans dimension).

Dans les applications, en revanche, le sujet considère les variables d'espaces  $x$  et  $y$  (des longueurs) qui varient entre 0 et  $L$ .

Dans ces conditions, le pas de discrétisation est  $h = L/N$  (et non pas  $h = 1/N$ ), la relation (7) devient

$$(16) \quad \rho''(i, j) = \frac{h^2 \rho(x_i, y_i)}{\varepsilon_0}$$

et les formules (15) de calcul approché du champ électrostatique deviennent

$$(17) \quad E_x(i, j) \approx \frac{V(i, j) - V(i+1, j)}{h}, \quad E_y(i, j) \approx \frac{V(i, j) - V(i, j+1)}{h}.$$

## II.1 Fil cylindrique chargé uniformément

## Étude numérique

Q 19. Le point de coordonnées  $(x, y)$  est à l'intérieur ou sur le bord du cercle de centre  $(x_c, y_c)$  et de rayon  $R$  si, et seulement si,

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 \leq R^2.$$

Le code s'en déduit immédiatement.

```
def dans_cylindre(x, y, xc, yc, R):
    return (x-xc)**2+(y-yc)**2<=R**2
```

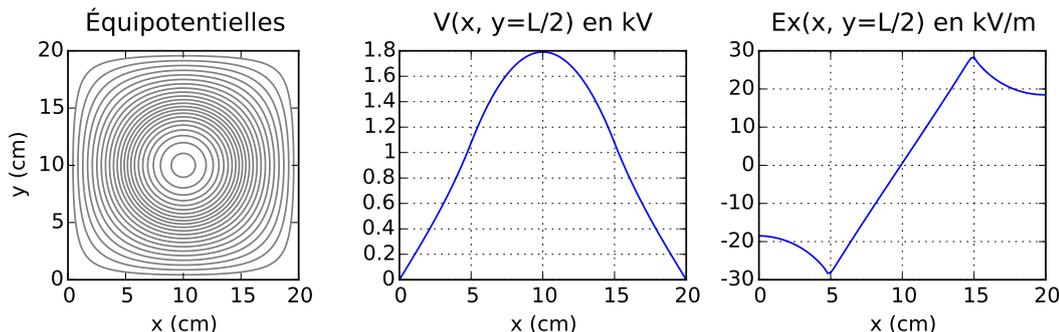
Q 20. Initialement, le tableau `tab_rhos` ne contient que des 0. Le cylindre étant uniformément chargé, il suffit donc d'affecter la valeur constante (16) aux coordonnées des points situés à l'intérieur du cylindre.

```
def initialise_rhos_cylindre(tab_rhos):
    valeur = rho*h**2/eps0
    for i in range(N+1):
        for j in range(N+1):
            if dans_cylindre(i*h, j*h, L/2, L/2, L/4):
                tab_rhos[i, j] = valeur
```

Q 21. Dans le cas présent, les points dont le potentiel est fixé sont les points de l'enceinte, c'est-à-dire les points pour lesquels l'une des deux coordonnées est égale à 0 ou à  $L$ .

```
def initialise_frontiere_cylindre(tab_f):
    for i in range(N+1):
        tab_f[i, 0]=True # y = 0
        tab_f[i, N]=True # y = L
        tab_f[0, i]=True # x = 0
        tab_f[N, i]=True # x = L
```

## Q 22. Cas d'un cylindre plein



Les calculs théoriques reposent sur des conditions aux limites très simplifiées (on suppose que le potentiel  $V$  tend vers 0 au voisinage de l'infini), qui permettent d'effectuer les calculs littéralement.

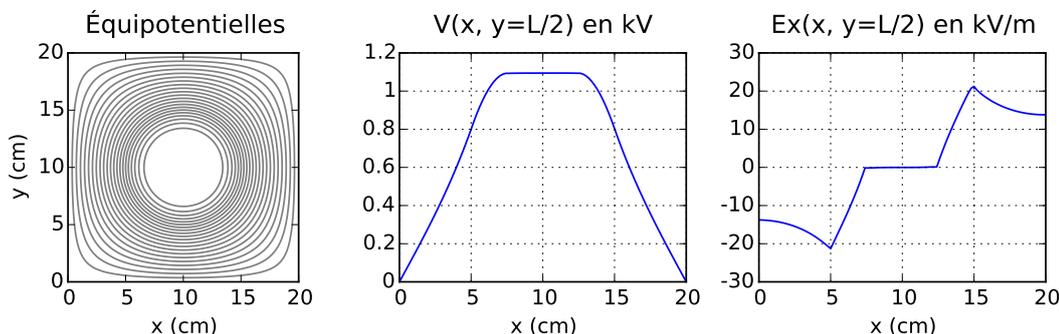
La situation concrète (avec potentiel nul sur l'enceinte carrée) ne permet pas d'obtenir une expression littérale simple du potentiel. Dans ces conditions, la méthode de résolution numérique mise en œuvre donne une approximation de  $V(x, y)$  bien plus précise que les calculs théoriques.

## Q 23. Cas d'un cylindre creux

Cette fois, les charges sont uniformément réparties dans un anneau :

$$\frac{R}{2} \leq \sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2} \leq R$$

comme on le voit sur l'expression de  $E_x(x, y)$  (on le voit quand on connaît le Théorème de Gauss).



## II.2 Mouvement d'un électron dans un tube d'oscilloscope

## 16. Étude théorique simplifiée

Une fois encore, pour effectuer les calculs littéralement, on recourt à un modèle théorique excessivement simplifié. On suppose ainsi que :

- entre les plaques du condensateur, le champ est uniforme ;
- en dehors du condensateur, le champ est nul.

17. La résolution numérique ne nous donnera bien entendu qu'une valeur approchée du potentiel  $V(x, y)$ , mais cette valeur approchée sera bien plus réaliste que le modèle théorique *en tout ou rien*.

## Potentiel et champ électrique dans l'enceinte

Q 28. Il n'y pas de charge volumique donc  $\rho(x, y)$  est identiquement nul.

```
format = (N+1, N+1)
rhos_osc = np.zeros(format)
```

**Q 29.** La frontière, c'est-à-dire l'ensemble des points où le potentiel est imposé, est ici constituée des quatre côtés du carré ainsi que des deux plaques du condensateur.

Sur les quatre côtés du carré, l'un des deux indices  $i$  ou  $j$  est égal à 0 ou à  $N$  et le potentiel est nul.

Le potentiel est égal à  $\pm V_p$  sur les plaques du condensateur.

La plaque au potentiel  $-V_p$  est caractérisée par  $y = 4$  cm et par  $|x - (L - D)| \leq \ell/2$ , c'est-à-dire  $1 \leq x \leq 5$  (en cm), soit  $j = 40$  et  $10 \leq i < 50$ .

De manière analogue, la plaque au potentiel  $+V_p$  est caractérisée par  $j = 60$  et  $10 \leq i < 50$ .

REMARQUE.— On considère ici que le pas  $h$  représente l'épaisseur d'une plaque et qu'il est assez petit pour ne pas chipoter sur les valeurs de  $i$  et  $j$  qui délimitent les plaques.

```
V_osc = np.zeros(format)
frontiere_osc = np.zeros(format, np.bool)

def initialise_frontiere_condensateur(tab_V, tab_f):
    # la frontière est constituée du bord du tableau où le potentiel est déjà fixé à 0
    for i in range(N+1):
        tab_f[i,0] = True
        tab_f[i,N] = True
        tab_f[0,i] = True
        tab_f[N,i] = True
    # et des plaques du condensateur où le potentiel est fixé à  $\pm V_p$ .
    for i in range(10, 50):
        tab_f[i,40] = True
        tab_V[i,40] = -Vp
        tab_f[i,60] = True
        tab_V[i,60] = Vp
```

18. On va encore m'accuser de chipoter... Tant pis!

Chaque couple  $(i, j)$  repère une cellule du maillage. En lisant l'énoncé, il semblerait que le couple  $(i, j)$  repère précisément les couples  $(x, y)$  tels que

$$ih \leq x < ih + h \quad \text{et} \quad jh \leq y < jh + h.$$

Or les indices  $i$  et  $j$  varient de 0 à  $N$  inclus, donc les coordonnées  $x$  et  $y$  varient toutes les dans l'intervalle  $[0, (N+1)h[ = [0, L + h[$  et non pas dans l'intervalle  $[0, L[$ .

Nous allons vite oublier ces détails. Mais qu'on se souvienne qu'un modèle numérique rigoureux devrait impérativement tenir compte de l'épaisseur des plaques et s'appuyer sur un schéma plus réaliste. (Ne commandez pas un meuble à un ébéniste qui ne tiendrait pas compte de l'épaisseur des planches sur son plan!)

**Q 30.** Comme le potentiel  $E$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\Omega$ , on déduit de la formule de Taylor que

$$E(x, y) = E(ih + r_x, jh + r_y) = E(ih, jh) + r_x \cdot \frac{\partial E}{\partial x}(ih, jh) + r_y \cdot \frac{\partial E}{\partial y}(ih, jh) + o(\|(r_x, r_y)\|)$$

et donc que

$$E(x, y) \approx E(ih, jh) + r_x \cdot \frac{E(ih + h, jh) - E(ih, jh)}{h} + r_y \cdot \frac{E(ih, jh + h) - E(ih, jh)}{h}.$$

Puisque nous disposons d'un moyen de calculer une valeur approchée du champ  $E$  en chaque point  $(ih, jh)$ , cette formule de Taylor nous permet d'en déduire une valeur approchée de  $E(x, y)$  en chaque point  $(x, y)$  de l'ouvert  $\Omega$ .

## Calcul de la trajectoire

**Q 31.** On a admis que la particule n'étant soumise qu'à l'action du champ électrique (son poids est en particulier négligé) et que le référentiel lié au laboratoire est galiléen. Le Principe fondamental de la Dynamique nous dit alors que le mouvement de la particule est gouverné par l'équation différentielle suivante.

$$(18) \quad m \cdot \frac{d\mathbf{OM}(t)}{dt^2} = -e \cdot \mathbf{E}(M(t))$$

où  $O = (0,0)$  et  $M(t) = (x(t), y(t))$ .

Il s'agit d'une équation différentielle du second ordre et comme l'expression du champ  $\mathbf{E}$  en fonction des coordonnées  $x$  et  $y$  est très compliquée, ce n'est pas une équation linéaire... Peu importe ! Linéaire ou non, une telle équation peut être transformée en un système de deux équations du premier ordre.

$$(19) \quad m \cdot \frac{d\mathbf{OM}(t)}{dt^2} = -e \cdot \mathbf{E}(M(t)) \quad \iff \quad \begin{cases} \frac{d\mathbf{OM}(t)}{dt} = \mathbf{v}(t) \\ \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \frac{-e}{m} \cdot \mathbf{E}(M(t)) \end{cases}$$

On en déduit comme d'habitude les approximations qui vont permettre de définir le schéma d'Euler.

$$(20) \quad \frac{\delta x}{\delta t} \approx \frac{dx}{dt} = v_x \qquad \frac{\delta y}{\delta t} \approx \frac{dy}{dt} = v_y$$

$$(21) \quad \frac{\delta v_x}{\delta t} \approx \frac{dv_x}{dt} = \frac{-e}{m} \cdot E_x \qquad \frac{\delta v_y}{\delta t} \approx \frac{dv_y}{dt} = \frac{-e}{m} \cdot E_y$$

**Q 32.**

• La position initiale de la particule est  $(x, y) = (0, 5)$  (en cm), ce qui correspond aux indices  $(i, j) = (0, 50)$ .

REMARQUE.— Ou alors  $(i, j) = (0, 49)$  ? on a dit qu'on ne chipotait pas !

• La vitesse initiale de la particule est  $v_0$ , dirigée selon l'axe des abscisses, c'est-à-dire  $(v_x, v_y) = (v_0, 0)$ .

• Dans le modèle théorique simplifié, l'accélération est identiquement nulle selon l'axe des abscisses, donc la composante  $v_x$  est constamment égale à  $v_0 = 1,8 \cdot 10^7$  m/s. On peut donc estimer que la durée mise pour traverser la zone de déviation est de l'ordre de  $L/v_0 \approx 5,5 \cdot 10^{-9}$  s et que le pas de temps du schéma d'Euler doit être égal à  $\frac{L}{200v_0} = 2,8 \cdot 10^{-11}$  s.

**Q 33.**

```
Npts = 200           # nb de points calculés pour le tracé de la trajectoire
v0 = np.sqrt(2*e*V0/m) # vitesse initiale de l'électron
dt = L/(Npts*v0)     # pas temporel pour le schéma d'Euler
```

À  $t = 0$ , l'abscisse  $x(t)$  et la vitesse verticale  $v_y(t)$  sont nulles, tandis que l'ordonnée  $y(t)$  est égale à 5 cm et que la vitesse horizontale  $v_x(t)$  est égale à  $v_0$ .

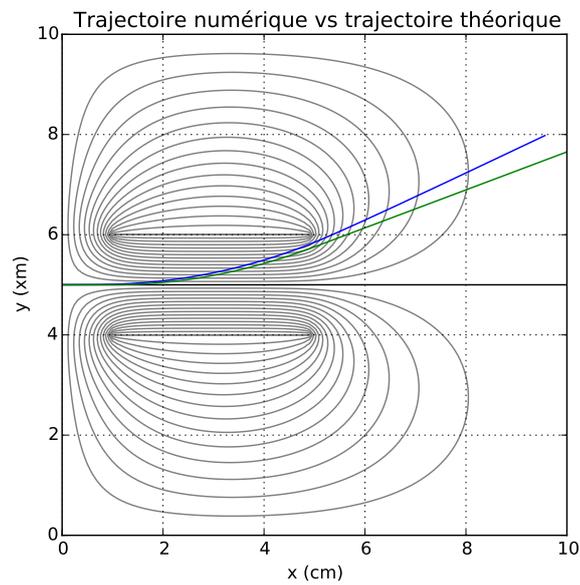
Il est donc inutile de modifier `lx[0]` et `lvy[0]` et on pose simplement :

```
ly[0] = 5e-2
lvx[0] = v0
```

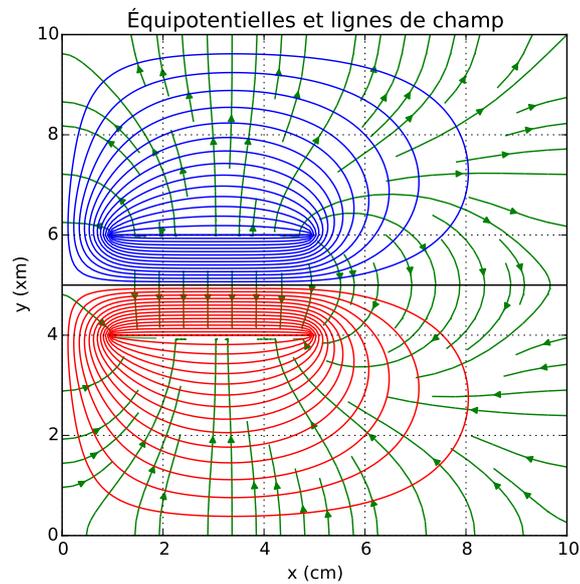
**Q 34.** On code directement les relations (20) et (21).

```
for k in range(1, Npts):
    lx[k] = lx[k-1] + lvx[k-1]*dt
    ly[k] = ly[k-1] + lvy[k-1]*dt
    lvx[k] = lvx[k-1] - e/m*val_Ex(Ex, Ey, lx[k-1], ly[k-1], h)*dt
    lvy[k] = lvy[k-1] - e/m*val_Ey(Ex, Ey, lx[k-1], ly[k-1], h)*dt
return lx, ly, lvx, lvy
```

- Q 35.** On trace les deux trajectoires sur l'ensemble des équipotentielles.  
 La trajectoire calculée littéralement sur le modèle théorique simplifiée est rectiligne en dehors des plaques du condensateur (courbe verte) alors que la trajectoire calculée numériquement suivant le schéma d'Euler ne l'est pas (courbe bleue).



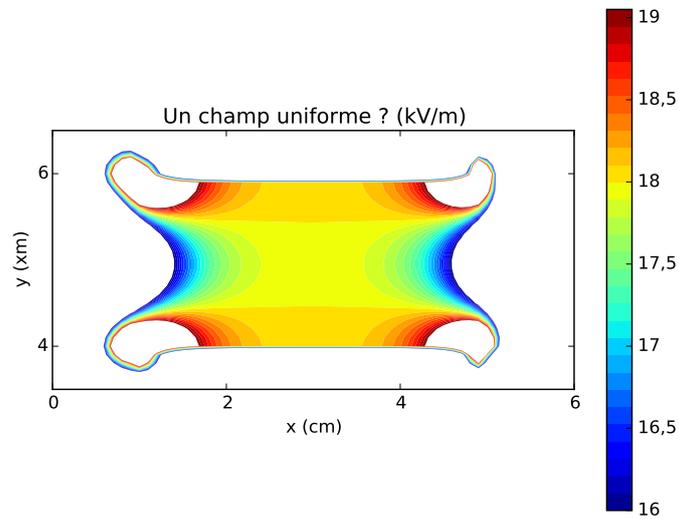
Les équipotentielles positives (resp. négatives, resp. nulle) sont tracées en bleu (resp. en rouge, resp. en noir) et les lignes de champ sont tracées en vert.



### 19. Hypothèse d'uniformité

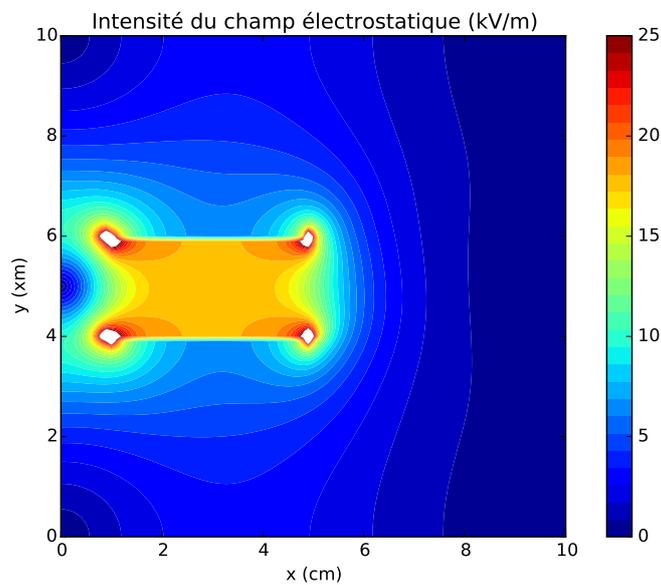
Revenons sur le modèle théorique simplifié.

19.1 Est-il raisonnable de considérer que le champ est constant entre les plaques ?



À 5% près, si on reste assez loin des extrémités des plaques, l'intensité du champ reste constante.

19.2 Et en dehors des plaques, est-il raisonnable de considérer que le champ électrostatique est nul ?



Là encore, cette approximation est raisonnable si on est assez loin des plaques.

19.3 On comprend ainsi que le modèle théorique est trop simplifié pour décrire la trajectoire de la particule avec une précision suffisante.