Remarques générales

Le sujet portait sur plusieurs parties du programme des classes préparatoires MPSI et MP, le début était particulièrement simple et classique, ce qui a permis de bien classer l'ensemble des candidats. Quelques questions de topologie, redoutables pour le candidat moyen, ont permis aux meilleurs de faire la différence.

Les correcteurs ont noté une dégradation dans la présentation des copies. Certes, il s'agit d'une épreuve de trois heures et pour terminer le problème il faut être très rapide, on peut donc admettre quelques ratures, mais dans certains cas il est clair que le brouillon, pourtant fourni par le concours, n'a pas été utilisé. Les candidats doivent être conscients que si un correcteur n'arrive pas à lire la réponse à une question, il mettra zéro, on n'attribue pas de points au bénéfice du doute.

Remarques particulières

La question **[1]**, qui consistait à démontrer que deux sous-ensembles étaient des sous-espaces vectoriels, a été généralement très traitée, quoique de manière plus ou moins précise, avec l'oubli classique de la condition non vide dans quelques copies.

La question suivante a été beaucoup moins bien réussie. Une proportion non négligeable de candidats oubliaient de préciser que $x \sin t$ appartient à $[-a, a]$ pour tout $(x, t) \in [-a, a] \times [0, \pi/2]$, dans la plupart des copies on trouvait une application souvent laborieuse voire incomplète du théorème de Leibniz (= théorème de dérivation sous le signe $\int$), et la démonstration de la linéarité, quand elle n'était pas carrément oubliée, se résumait trop souvent à des arguments assez vagues.

Mis à part dans les copies de candidats qui n'avaient pas grand'chose à faire à un concours de ce niveau, la question suivante était bien traitée.

Les questions **[4]** et **[6]** portaient sur les intégrales de Wallis, thème très classique, aussi peut-on s'étonner de rencontrer des candidats qui n'arrivent même pas à établir la formule de Wallis.

D'autres déterminent l'expression de W_n en fonction de n, qui n'était pas demandée, pour répondre à la question **[4]**. Nous conseillons aux futurs candidats de suivre l'énoncé plutôt que d'utiliser leur mémoire.

À la question **[5]** la décroissance stricte n'était pratiquement jamais bien traitée, l'hypothèse de continuité des fonctions intégrées étant presque toujours oubliée. Rappelons que l'intégration d'une inégalité, même stricte, ne donne qu'une inégalité large. (NDBJ : cette remarque me paraît excessivement rigoureuse, mais j'en prends note !)

On trouvait ensuite des questions de topologie, comme toujours déstabilisantes pour de nombreux candidats. Par exemple à la question **[6]**, il s'agit de démontrer la continuité d'une application dont on vient de montrer la linéarité, il est donc assez maladroit de partir de la définition générale de la continuité. La question **[7]**, au demeurant plus difficile, a été massivement sautée.

La question **[8]** était mieux réussie, mais il y avait quelquefois des omissions dans la définition d'une norme ou des imprécisions dans leur démonstration, comme l'oubli du module. La question **[7]** était ouverte, ce qui n'a pas empêché un certain nombre de candidats de conjecturer une réponse négative et de l'utiliser pour en conclure que les normes M et N n'étaient pas équivalentes.

La clef de la question **[9]** était le théorème de Weierstrass, assez souvent cité, mais son application au cas particulier du problème a été traitée de manières très diverses, allant d'une vague allusion à un raisonnement parfaitement rigoureux.

La question **[10]** était ouverte et elle s'est révélée particulièrement bloquante pour ceux qui ne l'ont pas résolue. Elle était relativement simple si on s'y prenait bien et il suffisait pour cela d'avoir bien compris la notion de linéarité qui permet de se restreindre à une base. On ne peut que conseiller aux futurs candidats de ne pas passer trop vite sur une question ouverte dont la réponse peut être déterminante pour la suite du sujet. Dans ce cas précis il n'y avait plus grand'chose dans les copies de ceux qui n'avaient pas vu que $u \circ v$ était égal à l'identité, la question **[15]** qui donnait la réponse n'a pas été d'un grand secours.

Le passage des polynômes aux fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ intervenait peu après la démonstration de la densité de l'espace vectoriel des polynômes, pourtant on trouvait dans un certain nombre de copies des tentatives de calculs directs de la composée $u \circ v$ sans aucun succès bien sûr. On pourrait espérer qu'après deux voire trois années de classe préparatoire, la pratique d'un vrai problème, qui ne se résume pas à une compilation d'exercices, soit mieux maîtrisée.

La question **[12]** qui était plus délicate d'un point de vue topologique, n'a été bien traitée que dans les très bonnes copies. La question suivante a mis en évidence le manque d'intérêt des générations actuelles pour les calculs, puisqu'elle n'a été abordée que dans très peu de copies et presque jamais menée à son terme, ce qui a complètement neutralisé l'intervention hors programme de la fonction $\operatorname{Arg sh}$. (NDBJ : oui, la fonction $\operatorname{Arg sh}$ est hors-programme, mais une telle aberration n'aurait jamais dû se produire.)

La question de parité était assez simple dans un sens, par contre la réciproque nécessitait le résultat de la question **[12]**, tout comme la question **[15]**. La question **[16]** a encore été abordée par un nombre significatif de candidats, ce qui montre que le problème était de longueur raisonnable, on peut à son propos faire une mise en garde : la réponse à une question ouverte n'est pas toujours non, cela marchait pour la question **[7]**, pas pour la question **[16]**.

Les trois dernières questions ont été très peu abordées, par quelques rares candidats (NDBJ : disons une petite trentaine ?) qui ont pratiquement terminé le problème.

En résumé, on peut conseiller aux futurs candidats de ne pas faire impasse sur la topologie, travailler les techniques de calcul et s'entraîner à traiter un problème dans sa globalité plutôt que de le voir comme une succession d'exercices.