

Solution ✿ Inégalité d'Hadamard

Partie A. Questions préliminaires

1. a. Deux versions du Théorème spectral.

✿ Soit E , un espace euclidien. Tout endomorphisme symétrique de E est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux.

✿ Toute matrice symétrique réelle $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable et il existe une matrice orthogonale $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que la matrice

$$P^{-1}MP = {}^tPMP$$

soit diagonale.

1. b. La matrice S donnée par l'énoncé est bien une matrice symétrique, mais c'est une matrice symétrique *complexe*.

✿ Le polynôme caractéristique de S est égal à X^2 (calcul très simple, à détailler sur la copie), donc la seule valeur propre de S est égale à 0. Si la matrice S était diagonalisable, elle serait donc semblable à la matrice nulle et donc en fait égale à la matrice nulle. Ce n'est pas le cas, donc la matrice S n'est pas diagonalisable.

✿ Variante : on vérifie sans peine que $S^2 = 0$, donc X^2 est un polynôme annulateur de S et le polynôme minimal de S est un diviseur unitaire non constant de X^2 . Comme $S \neq 0$, le polynôme minimal de S n'est pas égal à X , donc il est égal à X^2 .

Or une matrice est diagonalisable si, et seulement si, son polynôme minimal est scindé à racines simples et X^2 n'a qu'une racine double, donc S n'est pas diagonalisable.

2. a. Décomposons le vecteur x dans la base β :

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \varepsilon_i.$$

Par linéarité de s ,

$$s(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot s(\varepsilon_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i \cdot \varepsilon_i.$$

Et comme la base β est une base **orthonormée**,

$$R_s(x) = \langle s(x) | x \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i^2.$$

2. b. Considérons $x \in S(0, 1)$, c'est-à-dire $\|x\| = 1$. Comme la base β est **orthonormée**,

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2$$

et donc

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = 1.$$

✿ Pour tout $1 \leq i \leq n$, on a

$$\lambda_1 \leq \lambda_i \leq \lambda_n$$

donc

$$\lambda_1 \alpha_i^2 \leq \lambda_i \alpha_i^2 \leq \lambda_n \alpha_i^2$$

et en sommant sur i ,

$$\lambda_1 = \lambda_1 \times 1 \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i^2 \leq \lambda_n \times 1 = \lambda_n.$$

✿ On déduit alors de la question précédente que

$$\forall x \in S(0, 1), \quad \lambda_1 \leq R_s(x) \leq \lambda_n$$

c'est-à-dire

$$\forall x \in S(0, 1), \quad R_s(x) \in [\lambda_1, \lambda_n].$$

3. a. Soit $\lambda \in \text{Sp}(s)$. Il existe donc un vecteur propre x tel que $s(x) = \lambda \cdot x$. Or

$$\langle s(x) | x \rangle = \langle \lambda \cdot x | x \rangle = \lambda \|x\|^2 \quad \text{et} \quad \|x\|^2 > 0$$

(un vecteur propre n'est jamais nul) donc

$$\lambda = \frac{R_s(x)}{\|x\|^2}.$$

✿ Si l'endomorphisme symétrique s est positif, alors $R_s(x) \geq 0$ et par conséquent $\lambda \geq 0$.

✿ Si s est défini positif, alors $R_s(x) > 0$ (car $x \neq 0_E$) et par conséquent $\lambda > 0$.

3. b. Par définition, la j -ème colonne de la matrice S donne les coordonnées relatives à la base B du vecteur $s(e_j)$.

Puisqu'on considère ici le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$, la base canonique B est une **base orthonormée** et par conséquent

$$s(e_j) = \sum_{i=1}^n \langle s(e_j) | e_i \rangle \cdot e_i$$

et donc

$$\forall 1 \leq i, j \leq n, \quad s_{i,j} = \langle s(e_j) | e_i \rangle.$$

✿ Chaque vecteur e_i de la base B est unitaire (rappelons une fois encore que la base B est orthonormée !). On peut donc déduire de **2. b.** que

$$\forall 1 \leq i \leq n, \quad s_{i,i} = R_s(e_i) \in [\lambda_1, \lambda_n].$$

Partie B. Un maximum sur $O_n(\mathbb{R})$

4. Les applications $[M \mapsto M]$ et $[M \mapsto {}^tM]$ sont linéaire sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, espace vectoriel de dimension finie, donc ces applications sont continues.

En tant que produit d'applications continues, l'application

$$[M \mapsto {}^tMM]$$

est donc continue sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

D'autre part, l'application $[M \mapsto I_n]$ est continue en tant qu'application constante et par conséquent, l'application

$$[M \mapsto {}^tMM - I_n]$$

est continue comme différence d'applications continues.

✿ Variante : les coefficients de ${}^tMM - I_n$

$$\left(\sum_{k=1}^n m_{k,i} m_{k,j} \right) - \delta_{i,j}$$

sont des expressions *polynomiales* en les coefficients de M , donc l'application

$$[M \mapsto {}^tMM - I_n]$$

est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

5. Comme la matrice A est orthogonale, ses colonnes forment une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (pour le produit scalaire canonique). En particulier, les colonnes de A sont unitaires :

$$\forall 1 \leq j \leq n, \quad \sum_{i=1}^n a_{i,j}^2 = 1$$

et comme les $a_{i,j}$ sont des nombres réels, on en déduit que

$$\forall 1 \leq i, j \leq n, \quad 0 \leq a_{i,j}^2 \leq 1$$

et donc que

$$\forall 1 \leq i, j \leq n, \quad |a_{i,j}| \leq 1.$$

6. Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont équivalentes. On peut donc choisir par exemple la norme produit

$$\|M\|_\infty = \max_{1 \leq i, j \leq n} |m_{i,j}|$$

pour démontrer que $O_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

✱ Par 4., le groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$ est l'image réciproque du singleton $\{0_n\}$ par une application continue. Tout singleton étant fermé, on en déduit que $O_n(\mathbb{R})$ est une partie fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

✱ Par 6., le groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$ est une partie bornée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\forall M \in O_n(\mathbb{R}), \quad \|M\|_\infty \leq 1.$$

✱ En tant que partie fermée et bornée d'un espace vectoriel de dimension finie, le groupe orthogonal est donc une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

7.a. D'après le Théorème spectral 1.a., il existe une matrice orthogonale $Q \in O_n(\mathbb{R})$ telle que

$${}^tQSQ = \Delta$$

c'est-à-dire

$$S = Q\Delta{}^tQ.$$

Par conséquent,

$$AS = AQA\Delta{}^tQ$$

et comme $\text{tr}(XY) = \text{tr}(YX)$,

$$T(A) = \text{tr}([AQ\Delta]{}^tQ) = \text{tr}({}^tQ[AQ\Delta]) = \text{tr}(B\Delta)$$

en posant $B = {}^tQAQ$.

Comme $O_n(\mathbb{R})$ est un groupe multiplicatif et que A et Q sont orthogonales, la matrice ${}^tQ = Q^{-1}$ est orthogonale aussi et par conséquent

$$B = Q^{-1}AQ \in O_n(\mathbb{R}).$$

7.b. L'application

$$[A \mapsto T(A) = \text{tr}(AS)]$$

est linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (par linéarité à gauche du produit matriciel et linéarité de la trace) et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension finie, donc T est une application continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Comme $O_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ 6., on en déduit que T atteint un maximum (et aussi un minimum) sur $O_n(\mathbb{R})$.

REMARQUE.— Si $A \in O_n(\mathbb{R})$, alors $-A \in O_n(\mathbb{R})$ aussi (bien que $O_n(\mathbb{R})$ ne soit pas un sous-espace vectoriel!) et comme T est linéaire, si T atteint son maximum en $A_0 \in O_n(\mathbb{R})$, alors T atteint son minimum en $-A_0$ et

$$\min_{A \in O_n(\mathbb{R})} T(A) = T(-A_0) = -T(A_0) = -\max_{A \in O_n(\mathbb{R})} T(A).$$

C'est pour cette raison qu'on ne s'intéressera qu'au maximum de T !

7.c. Notons $B\Delta = (c_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. D'après la formule du produit matriciel et 5.,

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^n b_{i,k} \Delta_{k,j} = b_{i,j} \lambda_j \quad (*)$$

puisque B est une matrice orthogonale. Comme les valeurs propres λ_i sont positives, on en déduit que

$$T(A) = \text{tr}(B\Delta) = \sum_{i=1}^n c_{i,i} \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i = \text{tr}(\Delta).$$

Comme S et Δ sont semblables, on a $\text{tr}(\Delta) = \text{tr}(S)$ et ainsi

$$\forall A \in O_n(\mathbb{R}), \quad T(A) \leq \text{tr}(S).$$

✱ Pour que cette égalité soit une égalité, il faudrait que l'inégalité $(*)$ soit une égalité au moins pour $i = j$. Cela nous conduit à choisir $A = I_n$ (qui est bien une matrice orthogonale!). On a alors

$$B = {}^tQAQ = I_n$$

et donc

$$T(I_n) = \text{tr}(I_n \Delta) = \text{tr}(S).$$

✱ Par conséquent,

$$\max_{A \in O_n(\mathbb{R})} T(A) = \text{tr}(S) = T(I_n).$$

Partie C. Inégalité d'Hadamard

8. Comme la matrice S est diagonalisable,

$$\det S = \prod_{i=1}^n \lambda_i \quad \text{et} \quad \text{tr} S = \sum_{i=1}^n \lambda_i.$$

(On rappelle que ces deux propriétés sont vraies pour toutes les matrices trigonalisables.)

D'après l'inégalité arithmético-géométrique présentée dans l'introduction

$$\left(\prod_{i=1}^n \lambda_i \right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

puisque les valeurs propres λ_i sont positives et donc

$$\det S \leq \left(\frac{1}{n} \operatorname{tr} S \right)^n$$

puisque la fonction $[x \mapsto x^n]$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

9. La matrice S_α est bien symétrique :

$${}^t S_\alpha = {}^t ({}^t D S D) = {}^t D {}^t S {}^t ({}^t D) = {}^t D S D = S_\alpha$$

car S est symétrique.

Pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on sait que

$${}^t Y S Y \geq 0$$

puisque $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ par hypothèse. Par conséquent, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$${}^t X S_\alpha X = {}^t (D X) S (D X) \geq 0$$

avec $Y = DX$.

On a ainsi démontré que $S_\alpha \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

✦ Comme la matrice D est diagonale, les règles du calcul matriciel montrent que

$$S_\alpha = (\alpha_i s_{i,j} \alpha_j)_{1 \leq i,j \leq n}$$

et en particulier

$$\operatorname{tr}(S_\alpha) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 s_{i,i}.$$

10. Dans cette question, d'après le calcul précédent,

$$\operatorname{tr}(S_\alpha) = \sum_{i=1}^n \frac{s_{i,i}}{(\sqrt{s_{i,i}})^2} = n$$

et comme $S_\alpha \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, on peut déduire de l'inégalité (*) du 8. que

$$\det S_\alpha \leq \left(\frac{n}{n} \right)^n = 1.$$

✦ D'après la propriété de morphisme du déterminant,

$$\det S_\alpha = \det {}^t D \det S \det D = \det S \cdot (\det D)^2$$

(puisque une matrice et sa transposée ont même déterminant) et comme D est diagonale,

$$\det D = \prod_{i=1}^n \alpha_i = \sqrt{\prod_{i=1}^n \frac{1}{s_{i,i}}}.$$

On peut alors en déduire que

$$\det S_\alpha = \det S \cdot \prod_{i=1}^n \frac{1}{s_{i,i}} \leq 1$$

et donc que

$$\det S \leq \prod_{i=1}^n s_{i,i}.$$

11. Comme la matrice S est symétrique, il est clair que la matrice

$$S_\varepsilon = S + \varepsilon I_n$$

est symétrique. De plus, comme S est positive, alors

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad {}^t X S_\varepsilon X = \underbrace{{}^t X S X}_{\geq 0} + \underbrace{\varepsilon \|X\|^2}_{\geq 0} \geq 0$$

et en particulier 3.b.

$$\forall 1 \leq i \leq n, \quad s_{i,i} \geq \lambda_1 \geq 0.$$

Par conséquent, la matrice S_ε appartient $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et ses coefficients diagonaux sont strictement positifs :

$$\forall 1 \leq i \leq n, \quad s_{i,i} + \varepsilon \geq \varepsilon > 0.$$

On peut donc appliquer le résultat du 10. à la matrice S_ε :

$$\det(S_\varepsilon) \leq \prod_{i=1}^n (s_{i,i} + \varepsilon).$$

✦ Quelle que soit la norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\|S_\varepsilon - S\| = \varepsilon \|I_n\| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Le déterminant étant une application continue (car polynomiale en fonction des coordonnées) sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on en déduit que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \det S_\varepsilon = \det S$$

(par composition de limites).

Il est par ailleurs évident que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \prod_{i=1}^n (s_{i,i} + \varepsilon) = \prod_{i=1}^n s_{i,i}$$

et comme S est diagonalisable, on en déduit que

$$\prod_{i=1}^n \lambda_i = \det S \leq \prod_{i=1}^n s_{i,i}.$$

REMARQUE.— On aurait pu conclure plus simplement (mais pas forcément plus vite) en justifiant que les valeurs propres de S_ε sont les réels $\lambda_i + \varepsilon$.

REMARQUE.— Il faut bien comprendre la méthode suivie par l'énoncé : on a établi un résultat sur les matrices symétriques définies positives ; on a ensuite démontré que l'ensemble $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ des matrices symétriques définies positives était dense dans l'ensemble $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ des matrices symétriques positives (c'est ce que signifie le fait que S_ε tende vers S) et on a finalement conclu par densité puisque les deux membres de l'inégalité d'Hadamard sont des fonctions continues de la matrice.

Partie D. Application : détermination d'un minimum

12. Soit $A \in \mathcal{U}$.

Il est clair que la matrice B est symétrique réelle :

$${}^t B = {}^t \Omega {}^t A \Omega = {}^t \Omega A \Omega$$

car A est symétrique réelle.

Elle est aussi définie positive :

$$\forall X \neq 0, \quad {}^t X B X = {}^t (\Omega X) A (\Omega X) > 0$$

car A est définie positive et ΩX , image d'un vecteur non nul par une matrice *inversible*, n'est pas la colonne nulle.

Enfin, comme on l'a vu au 10.

$$\det B = \det A \cdot (\det \Omega)^2 = \det A = 1$$

car $\det \Omega = \pm 1$ (propriété bien connue des matrices orthogonales).

✱ D'autre part, par un calcul analogue à celui du 7.a.,

$$\operatorname{tr}(AS) = \operatorname{tr}(A \Omega \Delta {}^t \Omega) = \operatorname{tr}({}^t \Omega A \Omega \Delta) = \operatorname{tr}(B \Delta).$$

13. Au 12., nous venons de démontrer que

$$\{\operatorname{tr}(AS), A \in \mathcal{U}\} \subset \{\operatorname{tr}(B \Delta), B \in \mathcal{U}\}.$$

✱ Réciproquement, soit $B \in \mathcal{U}$. Les calculs du 12. nous incitent à considérer

$$A = \Omega B {}^t \Omega.$$

Pour les mêmes raisons que plus haut, la matrice A appartient bien à $\mathcal{U}$ et

$$\operatorname{tr}(B \Delta) = \operatorname{tr}(AS),$$

ce qui prouve bien que

$$\{\operatorname{tr}(B \Delta), B \in \mathcal{U}\} \subset \{\operatorname{tr}(AS), A \in \mathcal{U}\}$$

et l'égalité des deux ensembles est démontrée.

✱ Comme $I_n \in \mathcal{U}$ de façon évidente,

$$\operatorname{tr} S = \operatorname{tr}(I_n S) \in \{\operatorname{tr}(AS), A \in \mathcal{U}\}.$$

✱ Soit $B \in \mathcal{U}$. Comme Δ est diagonale,

$$\operatorname{tr}(B \Delta) = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_{i,i}$$

et comme $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, alors 3.b.

$$\forall 1 \leq i \leq n, \quad b_{i,i} > 0.$$

Les valeurs propres λ_i étant aussi supposées strictement positives, on en déduit que

$$\forall B \in \mathcal{U}, \quad \operatorname{tr}(B \Delta) > 0.$$

Par conséquent, l'ensemble

$$\{\operatorname{tr}(AS), A \in \mathcal{U}\}$$

est une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}_+^*$ et admet à ce titre une borne inférieure.

REMARQUE.— La borne inférieure est positive et à ce stade, rien ne prouve qu'elle soit strictement positive.

14. On a vu que les coefficients diagonaux de $B \Delta$ étaient strictement positifs :

$$\forall 1 \leq i \leq n, \quad b_{i,i} \lambda_i > 0.$$

D'après l'inégalité arithmético-géométrique (*),

$$\left(\prod_{i=1}^n b_{i,i} \lambda_i \right)^{1/n} \leq \frac{\operatorname{tr}(B \Delta)}{n}$$

d'où évidemment

$$\operatorname{tr}(B \Delta) \geq n \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i \right)^{1/n} \left(\prod_{i=1}^n b_{i,i} \right)^{1/n}.$$

15. Comme S est diagonalisable,

$$\prod_{i=1}^n \lambda_i = \det S.$$

Comme $B \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \subset S_n^+(\mathbb{R})$, on peut lui appliquer l'inégalité d'Hadamard :

$$\prod_{i=1}^n b_{i,i} \geq \det B = 1$$

(puisque $B \in \mathcal{U}$).

On déduit de l'inégalité du 14. que

$$\forall B \in \mathcal{U}, \quad \operatorname{tr}(B \Delta) \geq n(\det S)^{1/n}.$$

REMARQUE.— On a ainsi démontré que l'ensemble

$$\{\operatorname{tr}(AS), A \in \mathcal{U}\}$$

était minoré par $n(\det S)^{1/n} > 0$. Sa borne inférieure est donc *strictement* positive.

16. Comme elle est diagonale, la matrice D est symétrique réelle et son déterminant est égal à

$$\prod_{k=1}^n \mu_k = \left[\prod_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_k} \right] \cdot [(\det S)^{1/n}]^n = \frac{\det S}{\det S} = 1.$$

Enfin, quelle que soit la colonne $X = (x_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$${}^t X D X = \sum_{k=1}^n \underbrace{\mu_k}_{>0} \underbrace{x_k^2}_{\geq 0}$$

donc ${}^t X D X \geq 0$ avec égalité si, et seulement si, $x_1 = \dots = x_n = 0$.

Bref : la matrice D appartient bien à $\mathcal{U}$. De plus, comme D et Δ sont diagonales,

$$\operatorname{tr}(D \Delta) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_k} (\det S)^{1/n} \cdot \lambda_k = n(\det S)^{1/n}$$

ce qui prouve que (avec 10.)

$$n(\det S)^{1/n} \in \{\operatorname{tr}(B \Delta), B \in \mathcal{U}\} = \{\operatorname{tr}(AS), A \in \mathcal{U}\}.$$

✱ Avec l'inégalité du 14., on a trouvé un minorant de l'ensemble

$$\{\operatorname{tr}(AS), A \in \mathcal{U}\}$$

qui appartient à cet ensemble : il s'agit donc de son plus petit élément. On a ainsi démontré que

$$m = \inf\{\operatorname{tr}(AS), A \in \mathcal{U}\} = \min\{\operatorname{tr}(AS), A \in \mathcal{U}\} = n(\det S)^{1/n}.$$