Familles génératrices et bases

On considère un espace vectoriel E sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, un sous-espace vectoriel F et on suppose connue une **famille génératrice** $\mathscr{F} = (e_1, \dots, e_n)$ de F.

❧ D'après le Théorème de la base incomplète, on peut extraire une base de F de cette famille génératrice. Autrement dit, en supprimant *un certain nombre* de vecteurs de $\mathscr{F}$ *bien choisis*, on obtient une base de F. Mais le Théorème de la base incomplète ne dit pas quel est ce *certain nombre* de vecteurs, ni comment *bien choisir* ces vecteurs.

❧ Si on sait que la dimension de F est égale à $1 \leqslant d \leqslant n$, alors le cardinal de toutes les bases de F est égal à d et il faut donc éliminer $(n-d)$ vecteurs de F. Mais ce renseignement supplémentaire ne nous dit toujours pas comment choisir les vecteurs à éliminer.

Quels vecteurs éliminer ?

Commençons par nous demander quels sont les vecteurs qu'il faut éliminer et quels sont ceux qu'il faut conserver. On verra ensuite comment les identifier.

❧ Si $y_{r+1} \in \text{Vect}(y_1, \dots, y_r)$, alors il existe des scalaires α_1, ..., α_r tels que

$$y_{r+1} = \alpha_1 \cdot y_1 + \cdots + \alpha_r \cdot y_r$$

et par conséquent, quels que soient les scalaires $(\beta_1, \dots, \beta_r, \beta_{r+1}) \in \mathbb{K}^{r+1}$,

$$\beta_1 \cdot y_1 + \cdots + \beta_r \cdot y_r + \beta_{r+1} \cdot y_{r+1} = (\beta_1 + \beta_{r+1}\alpha_1) \cdot y_1 + \cdots + (\beta_r + \beta_{r+1}\alpha_r) \cdot y_r \in \text{Vect}(y_1, \dots, y_r)$$

et donc $\text{Vect}(y_1, \dots, y_{r+1}) \subset \text{Vect}(y_1, \dots, y_r)$.

L'inclusion réciproque est évidente et par conséquent, les deux sous-espaces sont égaux.

Réciproquement, si $\text{Vect}(y_1, \dots, y_r, y_{r+1}) = \text{Vect}(y_1, \dots, y_r)$, alors en particulier $y_{r+1} \in \text{Vect}(y_1, \dots, y_r)$.

❧ Nous venons de démontrer le Théorème de diminution d'une famille génératrice, qu'on peut formuler de la manière suivante : *La famille* $(y_1, \dots, y_r, y_{r+1})$ *et la sous-famille* $(y_1, \dots, y_r)$ *engendrent le même sous-espace vectoriel si, et seulement si, le vecteur* y_{r+1} *est une combinaison linéaire des vecteurs* y_1, ..., y_r.

Variante : *Si* $(y_1, \dots, y_r, y_{r+1})$ *est une famille génératrice du sous-espace* V, *alors on peut éliminer le vecteur* y_{r+1} *de cette famille génératrice si, et seulement si, ce vecteur est une combinaison linéaire des vecteurs* y_1, ..., y_r.

❧ Il s'agit donc pour nous de trouver dans la famille génératrice $(x_1, \dots, x_n)$ quels sont les vecteurs qui sont combinaisons linéaires des autres vecteurs.

Il faut maintenant remarquer que la propriété qui nous intéresse

$$y_{r+1} = \alpha_1 \cdot y_1 + \cdots + \alpha_r \cdot y_r$$

peut aussi s'écrire

$$\alpha_1 \cdot y_1 + \cdots + \alpha_r \cdot y_r - y_{r+1} = 0$$

et comme la famille de scalaires $(\alpha_1, \dots, \alpha_r, -1)$ n'est pas la famille nulle, cette propriété doit être interprétée comme une relation de liaison entre les vecteurs y_1, ..., y_r et y_{r+1}.

Bref : nous cherchons les relations de liaisons (*toutes* les relations de liaison !) entre les vecteurs y_1, ..., y_r et y_{r+1}. En pratique, on y arrive grâce à l'algorithme du pivot (il s'agit en fait de calculer le noyau d'une matrice).

Méthode d'élimination

❧ Une relation de liaison nous permet d'éliminer un vecteur. Lequel ? N'importe quel vecteur affecté d'un scalaire non nul dans la relation de liaison ! Ainsi la relation de liaison

$$2 \cdot x_1 + x_3 - 3 \cdot x_4 = 0$$

permet d'éliminer $x_1 = \frac{-1}{2} \cdot x_3 + \frac{3}{2} \cdot x_4$, mais aussi $x_3 = -2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_4$ et aussi $x_4 = \frac{2}{3} \cdot x_1 + \frac{1}{3} \cdot x_3$. Au choix !

❧ Ça se complique quand il s'agit d'éliminer plusieurs vecteurs.

❧ Considérons par exemple $F = \text{Vect}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ et supposons connues deux relations de liaison :

$$2 \cdot x_1 + x_2 - x_4 = 0 \qquad x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0.$$

On peut alors éliminer $x_4 = 2 \cdot x_1 + x_2$ (première relation de liaison) et $x_3 = \frac{-1}{2} \cdot x_1 + \frac{3}{2} \cdot x_2$ (deuxième relation) et par conséquent $F = \text{Vect}(x_1, x_2)$.

❧ Autre exemple — supposons connues les relations de liaison :

$$x_1 + 2 \cdot x_2 + x_4 = 0 \qquad x_1 - x_2 + 2 \cdot x_4 = 0.$$

On peut alors éliminer $x_4 = -x_1 - 2 \cdot x_2$ (première relation de liaison). Ayant éliminé x_4, nous devons réécrire la seconde relation de liaison :

$$0 = x_1 - x_2 + 2 \cdot (-x_1 - 2 \cdot x_2) = -x_1 - 5 \cdot x_2.$$

On peut aussi éliminer x_1 ou x_2, au choix !

❧ On conçoit bien que ces exemples peuvent être généralisés :

– chaque relation de liaison entre les vecteurs $x_1, \ldots, x_n$ permet d'éliminer un des vecteurs ;
– à chaque élimination, il faut réécrire les relations de liaison non encore utilisées pour poursuivre le processus.