E.P.I.T.A. 2020

Corrigé de l'épreuve de mathématiques (Option - 2h)

■ PARTIE I : Une solution de l'équation (E)

1.a) Il résulte de la règle d'Alembert que la série entière $\sum \frac{(-1)^n}{(n!)^2} x^n$ converge absolument (et donc converge) pour tout réel x car :

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{((n+1)!)^2} x^{n+1} \right| \Big/ \left| \frac{(-1)^n}{(n!)^2} x^n \right| = \lim_{n \to +\infty} \frac{(n!)^2}{((n+1)!)^2} |x| = \lim_{n \to +\infty} \frac{|x|}{(n+1)^2} = 0.$$

Son rayon de convergence est donc égal à $+\infty$.

1.b) On sait que la somme d'une série entière est de classe C^∞ sur son intervalle de convergence, qui est ici $]-\infty, +\infty[$. Comme l'exponentielle est aussi de classe C^∞, on en déduit aussitôt que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Et comme une série entière se dérive terme à terme, on a de plus :

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} n\, x^{n-1} \qquad ; \qquad S''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} n(n-1)\, x^{n-2}.$$

Comme $f(t) = S(e^t)$, on a $f'(t) = e^t S'(e^t)$ et $f''(t) = e^t S'(e^t) + e^{2t} S''(e^t)$, ce qui conduit à :

$$f''(t) + e^t f(t) = \left(e^{2t} S''(e^t) + e^t S'(e^t)\right) + e^t S(e^t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} (n(n-1)+n)\, e^{nt} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} e^{(n+1)t}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{((n-1)!)^2} e^{nt} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} e^{(n+1)t}.$$

Et en posant $m = n - 1$ dans l'avant-dernier $\sum$, on obtient :

$$f''(t) + e^t f(t) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(m!)^2} e^{(m+1)t} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} e^{(n+1)t} = 0.$$

Ainsi, f est une solution particulière de l'équation (E).

c) Comme $f(t) = S(e^t)$, on a immédiatement $\lim_{-\infty} f = \lim_0 S = S(0) = 1$.

d) Etudions maintenant le signe de $f(t)$ sur $\mathbb{R}_-$ en regroupant ses termes deux par deux :

$$f(t) = S(e^t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} e^{nt} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{e^{2nt}}{((2n)!)^2} - \frac{e^{(2n+1)t}}{((2n+1)!)^2} \right).$$

Le premier terme est $1 - e^t$ est positif sur $]-\infty, 0]$ et le terme général s'écrit pour $n \geq 1$:

$$\frac{e^{2nt}}{((2n)!)^2} - \frac{e^{(2n+1)t}}{((2n+1)!)^2} = \frac{e^{2nt}}{((2n)!)^2} \left(1 - \frac{e^t}{(2n+1)^2} \right).$$

Pour $n \geq 1$, celui-ci est strictement positif sur $]-\infty, 0]$.
Il en résulte que la somme $f(t)$ est strictement positive sur $]-\infty, 0]$.

Etudions enfin le signe de $f'(t)$ sur $\mathbb{R}_-$ en procédant de même :

$$f'(t) = e^t\, S'\big(e^t\big) \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n\,!)^2}\, n\, e^{n\,t} \;=\; \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n\,!\,(n-1)\,!}\, e^{n\,t}$$

$$= -\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{e^{(2\,n+1)\,t}}{(2\,n+1)\,!\,(2\,n)\,!} - \frac{e^{(2\,n+2)\,t}}{(2\,n+2)\,!\,(2\,n+1)\,!} \right)$$

$$= -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{(2\,n+1)\,t}}{(2\,n+1)\,!\,(2\,n)\,!}\left(1 - \frac{e^t}{(2\,n+2)\,(2\,n+1)}\right)$$

Comme $\frac{e^t}{(2\,n+2)\,(2\,n+1)} \le \frac{e^t}{2} < 1$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \le 0$, on en déduit que $f'(t) < 0$ pour $t \le 0$.
Ainsi, f est décroissante de sa limite 1 en $-\infty$ à sa valeur en 0, qui est $f(0) > 0$.

2°) *Etude d'une solution de (E) définie sur* $\mathbb{R}_-$

a) Un calcul simple conduit pour $t \le 0$ à

$$g'(t) = f'(t) \int_t^0 \frac{\mathrm{d}\tau}{f^2(\tau)} - \frac{1}{f(t)}, \qquad g''(t) = f''(t) \int_t^0 \frac{\mathrm{d}\tau}{f^2(\tau)}.$$

Compte tenu du fait que f est solution de (E), on obtient donc pour $t \le 0$:

$$g''(t) + e^t\, g(t) = f''(t) \int_t^0 \frac{\mathrm{d}\tau}{f^2(\tau)} + e^t\, f(t) \int_t^0 \frac{\mathrm{d}\tau}{f^2(\tau)} = \big(f''(t) + e^t\, f(t)\big) \int_t^0 \frac{\mathrm{d}\tau}{f^2(\tau)} \;=\; 0.$$

Ainsi, g est solution de (E) sur $\mathbb{R}_-$.

b) La fonction $\frac{1}{f^2}$ est positive et équivalente à 1 en $-\infty$ puisque $\lim_{-\infty} f = 1$.
L'intégrale $\int_t^0 \frac{\mathrm{d}\tau}{f^2(\tau)}$ est donc divergente en $-\infty$, et on sait par théorème qu'elle est équivalente à :

$$\int_t^0 \frac{\mathrm{d}\tau}{f^2(\tau)} \;\underset{-\infty}{\sim}\; \int_t^0 \frac{\mathrm{d}\tau}{1} \;=\; -t.$$

Et comme $\lim_{-\infty} f = 1$, donc $f(t) \underset{-\infty}{\sim} 1$, il en résulte aussitôt que :

$$g(t) = f(t) \int_t^0 \frac{\mathrm{d}\tau}{f^2(\tau)} \;\underset{-\infty}{\sim}\; -t.$$

3°) *Etude des solutions de (E) sur* $\mathbb{R}_-$

a) Vérifions l'indépendance linéaire de la restriction de f à $\mathbb{R}_-$ et de g.
Considérons deux réels λ et μ et l'égalité suivante :

$$\forall\, t \le 0, \quad \lambda\, f(t) + \mu\, g(t) = \; f(t) \left(\lambda + \mu \int_t^0 \frac{\mathrm{d}\tau}{f^2(\tau)} \right) \;=\; 0.$$

Comme f est à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}_-$, on peut simplifier l'égalité par $f(t)$.
Faisant $t = 0$, on obtient $\lambda = 0$, et avec n'importe quelle valeur $t < 0$, on a $\mu = 0$.
Ainsi, les solutions f et g sont indépendantes sur $\mathbb{R}_-$, et comme on sait par théorème que l'espace vectoriel des solutions sur $\mathbb{R}_-$ de l'équation linéaire homogène du second ordre (E) : $y'' + e^t\, y = 0$ est de dimension 2, on en déduit que $(f,\, g)$ est une base de cet espace.

Ainsi donc, toute solution de (E) sur $\mathbb{R}_-$ s'écrit sous la forme $y = \lambda f + \mu g$ avec $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$, soit :

$$\forall\, t \leq 0, \quad y(t) = \lambda f(t) + \mu g(t) = f(t)\left(\lambda + \mu \int_t^0 \frac{\mathrm{d}\tau}{f^2(\tau)}\right).$$

b) On sait que la solution f a pour limite 1 en $-\infty$, et qu'elle est bornée puisqu'elle décroît de 1 à $f(0) > 0$ sur $\mathbb{R}_-$. Au contraire, la solution g, dont on a démontré qu'elle est équivalente à $-t$ en $-\infty$ n'est pas bornée et tend vers $+\infty$ en $-\infty$. Pour une solution $y = \lambda f + \mu g$, il en résulte que :
- si $\mu = 0$, y est bornée et a pour limite finie λ quand t tend vers $-\infty$.
- si $\mu \neq 0$, y n'est pas bornée et tend vers l'infini avec le signe de μ quand t tend vers $-\infty$.

■ PARTIE II : Etude asymptotique en $+\infty$ des solutions de l'équation (E)

4°) *Limite en $+\infty$ des solutions de (E)*

a) A toute solution $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de (E), on a associé la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $z(t) = y(t)\, e^{t/5}$.
On a donc $y(t) = e^{-t/5}\, z(t)$, puis en dérivant :

$$y'(t) = e^{-t/5}\, z'(t) - \frac{1}{5}\, e^{-t/5}\, z(t) \quad ; \quad y''(t) = e^{-t/5}\, z''(t) - \frac{2}{5}\, e^{-t/5}\, z'(t) + \frac{1}{25}\, e^{-t/5}\, z(t).$$

Compte tenu de la relation $y''(t) + e^t\, y(t) = 0$, il vient donc en simplifiant par $e^{-t/5}$:

$$z''(t) - \frac{2}{5}\, z'(t) + \left(e^t + \frac{1}{25}\right) z(t) = 0,$$

d'où résulte qu'on a pour tout réel t :

$$z(t) = \frac{2}{5}\, \frac{z'(t)}{e^t + \frac{1}{25}} - \frac{z''(t)}{e^t + \frac{1}{25}}.$$

b) Pour tout $t \geq 0$, on a donc en reportant ce résultat donnant $z(t)$ ci-dessous :

$$z^2(t) - z^2(0) = \int_0^t 2\, z(\tau)\, z'(\tau)\, \mathrm{d}\tau = \frac{4}{5} \int_0^t \frac{z'^2(\tau)}{e^\tau + \frac{1}{25}}\, \mathrm{d}\tau - \int_0^t \frac{2\, z'(\tau)\, z''(\tau)}{e^\tau + \frac{1}{25}}\, \mathrm{d}\tau.$$

c) Une intégration par parties de cette dernière intégrale donne alors pour tout $t \geq 0$:

$$\int_0^t \frac{2\, z'(\tau)\, z''(\tau)}{e^\tau + \frac{1}{25}}\, \mathrm{d}\tau = \left[\frac{z'^2(\tau)}{e^\tau + 1/25}\right]_0^t + \int_0^t \frac{e^\tau\, z'^2(\tau)}{\left(e^\tau + \frac{1}{25}\right)^2}\, \mathrm{d}\tau.$$

En reportant dans la relation précédente, il vient donc :

$$z^2(t) = z^2(0) + \frac{4}{5} \int_0^t \frac{z'^2(\tau)}{e^\tau + \frac{1}{25}}\, \mathrm{d}\tau - \frac{z'^2(t)}{e^t + \frac{1}{25}} + \frac{25}{26}\, z'^2(0) - \int_0^t \frac{e^\tau\, z'^2(\tau)}{\left(e^\tau + \frac{1}{25}\right)^2}\, \mathrm{d}\tau$$

$$= z^2(0) + \frac{25}{26}\, z'^2(0) - \frac{z'^2(t)}{e^t + \frac{1}{25}} - \frac{1}{5} \int_0^t \frac{\left(e^\tau - \frac{4}{25}\right)}{\left(e^\tau + \frac{1}{25}\right)^2}\, z'^2(\tau)\, \mathrm{d}\tau.$$

d) Pour $t \geq 0$, la fonction sous la dernière intégrale est positive, et son intégrale est donc positive. Comme $\frac{z'^2(t)}{e^t + \frac{1}{25}}$ est aussi positif, une simple majoration donne alors pour tout $t \geq 0$:

$$z^2(t) \leq z^2(0) + \frac{25}{26} z'^2(0) \quad \text{et} \quad |z(t)| \leq \sqrt{z^2(0) + \frac{25}{26} z'^2(0)}\ .$$

Comme $y(t) = z(t)\, e^{-t/5}$, on a donc pour tout réel $t \geq 0$:

$$|y(t)| \leq e^{-t/5} \sqrt{z^2(0) + \frac{25}{26} z'^2(0)}\ .$$

Toute solution y de l'équation différentielle (E) tend donc vers 0 en $+\infty$, et $y(t) = O\left(e^{-t/5}\right)$.

■ PARTIE III : Etude des zéros sur $\mathbb{R}_+$ des solutions de l'équation (E)

5°) *Premières propriétés des zéros des solutions non nulles de (E)*

a) Pour l'équation linéaire du second ordre (E) : $y'' + e^t\, y = 0$, le théorème de Cauchy-Lipschitz indique que pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$ et tout couple $(y_0, y_0') \in \mathbb{R}^2$, il existe une unique solution y de (E), définie sur $\mathbb{R}$, et vérifiant les conditions $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = y_0'$.

b) Ainsi, étant donné un réel t_0, l'unique solution y de (E) vérifiant $y(t_0) = y'(t_0) = 0$ est donc $y = 0$ puisque la fonction nulle est une solution vérifiant bien ces conditions.
On en déduit que si une solution non nulle s'annule en t_0, donc si $y(t_0) = 0$, alors $y'(t_0) \neq 0$ car sinon, y serait la solution nulle d'après ce qui précède.
Comme y' est continue, il existe donc un intervalle de la forme $]\, t_0 - h,\ t_0 + h\,[$ sur lequel y' garde le signe de $y'(t_0)$, et en fonction de ce signe, y est strictement croissante ou strictement décroissante sur $]\, t_0 - h,\ t_0 + h\,[$ de sorte qu'il est clair que y s'annule bien en changeant de signe en t_0.

c) S'il existe un segment $[a, b]$ sur lequel une solution *non nulle* de (E) s'annule une infinité de fois, il est clair qu'il existe une suite (t_n) de zéros deux à deux distincts de cette solution y dans $[a, b]$. Comme $[a, b]$ est compact, il résulte du théorème de Bolzano-Weierstrass qu'on peut extraire de (t_n) une suite $\left(t_{\varphi(n)}\right)$ qui converge vers un réel t de $[a, b]$.
D'autre part, comme on a $y\left(t_{\varphi(n)}\right) = y\left(t_{\varphi(n+1)}\right) = 0$, il résulte du théorème de Rolle que y' s'annule en au moins un point $c_{\varphi(n)}$ appartenant à $\left]\, t_{\varphi(n)}, t_{\varphi(n+1)}\right[$ ou $\left]\, t_{\varphi(n+1)}, t_{\varphi(n)}\right[$ selon l'ordre de $t_{\varphi(n)}$ et $t_{\varphi(n+1)}$.
Ajoutons que comme $\lim t_{\varphi(n)} = \lim t_{\varphi(n+1)} = t$, on a donc $\lim c_{\varphi(n)} = t$ et alors :
- comme $y\left(t_{\varphi(n)}\right) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a par passage à la limite $y(t) = 0$ (y est continue).
- comme $y'\left(c_{\varphi(n)}\right) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a par passage à la limite $y'(t) = 0$ (y' est continue).

Les résultats précédents montrent qu'alors y est la solution nulle, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse faite au départ. On en déduit donc qu'une solution *non nulle* de (E) ne peut s'annuler une infinité de fois dans un segment $[a, b]$. Elle ne s'y annule qu'au plus un nombre fini de fois.

6°) *Existence d'un zéro strictement positif d'une solution non nulle*

a) Si $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est solution non nulle de (E) : $y'' + e^t\, y = 0$, et si z est la fonction $t \mapsto \sin(t)$, qui vérifie $z'' = -z$, la dérivée de la fonction $W : t \mapsto y(t)\, z'(t) - y'(t)\, z(t)$ est :

$$W'(t) = y(t)\, z''(t) - y''(t)\, z(t) = -y(t)\, z(t) + e^t\, y(t)\, z(t) = \left(e^t - 1\right) y(t)\, z(t).$$

b) Si y ne s'annule pas sur $]\,0, \pi]$ et y garde un signe par exemple strictement positif, et sachant que z est aussi strictement positive sur $]\,0, \pi[$, on en déduit que $W'(t) > 0$ pour $0 < t < \pi$.
Donc W est strictement croissante sur $[0, \pi]$.
Or on a $W(0) = y(0)$ et $W(\pi) = -y(\pi)$, de sorte qu'on aurait $W(0) = y(0) < -y(\pi) = W(\pi)$.
C'est évidemment impossible car y ayant été supposée à valeurs strictement positives sur $]\,0, \pi]$, on a $y(0) \geq 0$ et $y(\pi) > 0$, et on ne peut donc avoir $y(0) < -y(\pi) < 0$.
Cette contradiction établit que la solution y de (E) s'annule au moins une fois dans $]\,0, \pi]$.

c) Comme on sait que y ne peut s'annuler qu'un nombre fini de fois dans le segment $[0, \pi]$, et qu'elle admet au moins un zéro dans $]\,0, \pi]$, il suffit de classer les zéros de y appartenant à $[0, \pi]$, et de noter t_1 le plus petit des zéros strictement positifs de y dans $]\,0, \pi]$.

7°) *Existence d'une suite croissante de zéros d'une solution non nulle dans* $\mathbb{R}_+$
a) Si $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une solution non nulle de (E) et t_1 son plus petit zéro strictement positif, et si $z(t) = \sin\left(e^{\frac{t_1}{2}}(t - t_1)\right)$, la dérivée de la fonction $W : t \mapsto y(t)\,z'(t) - y'(t)\,z(t)$ est :

$$W'(t) = y(t)\,z''(t) - y''(t)\,z(t) \;=\; -e^{t_1}\,y(t)\,z(t) + e^{t}\,y(t)\,z(t) \;=\; \left(e^{t} - e^{t_1}\right) y(t)\,z(t).$$

b) Si y ne s'annule pas sur $\left]\,t_1, t_1 + e^{-\frac{t_1}{2}}\pi\right]$ et y garde un signe par exemple strictement positif, et sachant que z est aussi strictement positive sur $]\,t_1, t_1 + e^{-\frac{t_1}{2}}\pi\,[$, on en déduit que $W'(t) > 0$ pour $t_1 < t < t_1 + e^{-\frac{t_1}{2}}\pi$. Donc W est strictement croissante sur $\left[t_1, t_1 + e^{-\frac{t_1}{2}}\pi\right]$.
Or on a $W(t_1) = 0$ et $W\left(t_1 + e^{-\frac{t_1}{2}}\pi\right) = -e^{\frac{t_1}{2}}\,y\left(t_1 + e^{-\frac{t_1}{2}}\pi\right) < 0$ puisque y est strictement positive sur l'intervalle $\left]\,t_1, t_1 + e^{-\frac{t_1}{2}}\pi\right]$, et on aurait donc $W(t_1) = 0 < W\left(t_1 + e^{-\frac{t_1}{2}}\pi\right) < 0$.
C'est impossible et comme précédemment, cette contradiction démontre que la solution y de (E) s'annule au moins une fois dans $\left]\,t_1, t_1 + e^{-\frac{t_1}{2}}\pi\right]$.

c) Comme on sait que y ne peut s'annuler qu'un nombre fini de fois dans $\left[t_1, t_1 + e^{-\frac{t_1}{2}}\pi\right]$, et qu'elle admet au moins un zéro dans $\left]\,t_1, t_1 + e^{-\frac{t_1}{2}}\pi\right]$, il suffit de classer les zéros de y de ce segment, puis de noter t_2 le plus petit des zéros strictement positifs de y dans $\left]\,t_1, t_1 + e^{-\frac{t_1}{2}}\pi\right]$.

d) Le raisonnement qui vient d'être effectué peut être recommencé en remplaçant t_1 par t_2, ce qui permettra de justifier de même l'existence d'un plus petit zéro t_3 de y, appartenant à $\left]\,t_2, t_2 + e^{-\frac{t_2}{2}}\pi\right]$.
En poursuivant par récurrence immédiate, on range en une suite strictement croissante l'ensemble des zéros de toute solution non nulle y, avec à chaque fois $t_n < t_{n+1} \leq t_n + e^{-\frac{t_n}{2}}\pi$.

e) Supposons la suite croissante (t_n) majorée, qui converge donc vers une limite finie L.
Comme on a $y(t_n) = 0$ pour tout entier naturel n, le passage à la limite donne $y(L) = 0$.
En reprenant le raisonnement précédent où l'on aura remplacé t_1 par L, on prouve que y admet donc au moins un zéro dans $\left]L, L + e^{-\frac{L}{2}}\pi\right]$. C'est évidemment contradictoire avec le fait que les zéros de y sont majorés par L. Cette contradiction montre que la suite strictement croissante (t_n) des zéros de y n'est pas majorée, et tend donc vers $+\infty$ et l'on voit aussi que $\lim(t_{n+1} - t_n) = 0$ d'après l'inégalité établie plus haut : $0 < t_{n+1} - t_n \leq e^{-\frac{t_n}{2}}\pi$.

f) Compte tenu des informations recueillies au cours du problème, voici l'allure de la courbe représentative de la solution f :