Probabilités MPSI — août 2020

Les questions indexées par des numéros différents sont indépendantes.

Pour l'ensemble des questions, on considère un espace probabilisé

$$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}).$$

Dans un premier temps, on étudie une variable aléatoire discrète X. On note $E_X \subset \mathbb{R}$, l'ensemble *fini* des valeurs prises par X.

1

1.a. La lettre $\mathbf{P}$ désigne

- ✔ une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$
- ❏ une fonction définie sur Ω
- ✔ une fonction définie sur $\mathcal{A}$
- ❏ une fonction définie sur E_X

Dire que $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ est un espace de probabilité revient à dire que Ω est un ensemble (parfois appelé univers, *mais c'est sans aucun intérêt), que $\mathcal{A}$ est une tribu sur Ω et que $\mathbf{P}$ est une mesure de probabilité sur le couple $(\Omega, \mathcal{A})$. En particulier, $\mathbf{P}$ est une application de $\mathcal{A}$ dans $[0, 1]$: elle calcule la probabilité (= un réel compris entre 0 et 1 au sens large) de chaque événement (= un élément quelconque de la tribu $\mathcal{A}$).*
Cela sous-entend que l'application $\mathbf{P}$ n'est pas définie sur Ω : si $\omega \in \Omega$, on peut éventuellement calculer $\mathbf{P}(\{\omega\})$ (en admettant que le singleton $\{\omega\}$ appartienne à la tribu $\mathcal{A}$ des événements) mais pas $\mathbf{P}(\omega)$!

1.b. La loi de la variable aléatoire X est

- ❏ une loi de probabilité sur Ω
- ✔ une loi de probabilité sur E_X
- ❏ une fonction définie sur E_X
- ✔ une fonction définie sur l'ensemble $\mathfrak{P}(E_X)$ des parties de E_X.

Comme X est une variable aléatoire à valeurs dans E_X et que l'ensemble E_X est un ensemble fini, *sa loi de probabilité est une mesure de probabilité sur l'espace probabilisable discret*

$$(E_X, \mathcal{T}_X)$$

où $\mathcal{T}_X$ est la tribu constituée par l'ensemble de toutes les parties de E_X.
❧ Dans le cadre du programme, on se limite aux variables aléatoires à valeurs dans un ensemble fini ou dénombrable. Pour les autres variables, la situation est sensiblement plus compliquée.

$\boxed{\textbf{1.c.}}$ La notation $[X = x]$ désigne un événement

✔ pour tout $x \in \mathbb{R}$

❏ pour tout $x \in E_X$ seulement

❏ c'est plus compliqué !

Comme X est une variable aléatoire discrète à valeurs dans une partie de $\mathbb{R}$, l'ensemble $[X = x]$ est (par définition) un événement pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad [X = x] \in \mathcal{A}.$$

Bien entendu, comme E_X est l'ensemble des valeurs prises par X, l'événement $[X = x]$ est l'événement impossible pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus E_X$. Comme son nom l'indique, l'événement impossible est bien un événement.

$$\varnothing \in \mathcal{A}$$

2

$\boxed{\textbf{2.a.}}$ Il existe un réel x tel que $[X = x]$ soit l'événement impossible.

✔ Vrai

✔ Vrai et même pour une infinité de valeurs de x

❏ Faux

Puisque $E_X \subset \mathbb{R}$ est l'ensemble fini *des valeurs prises par X, son complémentaire est un ensemble* infini *et, quel que soit $y \in E_X^c$, le réel y n'est pas une valeur prise par la fonction X, donc l'équation $X(\omega) = y$ n'a aucune solution $\omega \in \Omega$. Autrement dit,*

$$\forall\, y \in E_X^c, \quad [X = y] = \varnothing.$$

$\boxed{\textbf{2.b.}}$ La notation $[X \geqslant 0]$ désigne un événement.

● Vrai ❍ Faux

*Rappelons que les **événements** sont, par définition, les parties de Ω qui appartiennent à la tribu $\mathcal{A}$.*

Comme X est une variable aléatoire discrète, la famille

$$\big([X = x]\big)_{x \in E_X}$$

est un système complet d'événements.
D'autre part, puisque E_X est l'ensemble des valeurs prises *par X, il est clair que*

$$X(\omega) \geqslant 0 \iff \exists\, x \in E_X \cap \mathbb{R}_+, \quad X(\omega) = x$$

c'est-à-dire

$$[X \geqslant 0] = \left[\bigcup_{x \in E_X \cap \mathbb{R}_+} \underbrace{[X = x]}_{\in \mathcal{A}}\right] \in \mathcal{A}$$

puisque $\mathcal{A}$ est stable par union finie.
Cela démontre que $[X \geqslant 0]$ est bien un événement.

3.a. Si $\mathbf{P}(X \geqslant 0) = 1$, alors $[X \geqslant 0]$ est l'événement certain.

❍ Vrai ● Faux

L'événement certain est, par définition, Ω et on sait que $\mathbf{P}(\Omega) = 1$.
Cela dit, rien ne prouve que $A = \Omega$ soit la seule solution de l'équation $\mathbf{P}(A) = 1$, donc $[X \geqslant 0]$ n'est pas nécessairement l'événement certain.

3.b. Si $\mathbf{P}(X \geqslant 0) = 1$, alors $\mathbf{E}(X) \geqslant 0$.

● Vrai ❍ Faux

*Propriété vue en cours, dite **positivité de l'espérance**.*

3.c. Si $\mathbf{E}(X) \geqslant 0$, alors $\mathbf{P}(X \geqslant 0) = 1$.

❍ Vrai ● Faux

Si la valeur moyenne de X est positive, cela ne prouve pas que X soit presque sûrement positive !
Considérons par exemple la variable $X : \Omega \to \{-1; 1\}$ dont la loi est définie par

$$\mathbf{P}(X = -1) = \frac{1}{4} \quad \textit{et} \quad \mathbf{P}(X = 1) = \frac{3}{4}.$$

Manifestement, cette variable n'est pas presque sûrement positive

$$\mathbf{P}(X \geqslant 0) = \mathbf{P}(X = 1) < 1$$

alors que sa moyenne est strictement positive :

$$\mathbf{E}(X) = (-1) \cdot \frac{1}{4} + (+1) \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2} > 0.$$

3.d. Si l'espérance de X est nulle, alors

- ✔ $0 \leqslant \mathbf{P}(X > 0) < 1$
- ❑ $0 < \mathbf{P}(X > 0) < 1$
- ✔ $0 \leqslant \mathbf{P}(X > 0) \leqslant 1$
- ❑ $0 < \mathbf{P}(X > 0) \leqslant 1$

L'encadrement $0 \leqslant \mathbf{P}(A) \leqslant 1$ est vrai pour tout événement $A \in \mathcal{A}$.
*Si $\mathbf{P}(X > 0) = 1$, alors $\mathbf{E}(X) > 0$ par un raisonnement analogue à **[3.b]** (en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes), donc l'encadrement*

$$0 \leqslant \mathbf{P}(A) < 1,$$

plus précis que le précédent, est vrai lui aussi.
L'espérance de la variable aléatoire constante, égale à 0, est nulle. À cause de cet (unique !) contre-exemple, l'inégalité $0 < \mathbf{P}(X > 0)$ est fausse et les deux encadrements restants sont donc faux.

4

$\boxed{\textbf{4.a.}}$ La variable aléatoire X est positive si, et seulement si, $\mathbf{P}(X \geqslant 0) = 1$.

❍ Vrai ● Faux

La propriété $\mathbf{P}(X \geqslant 0) = 1$ *signifie que l'événement*

$$[X \geqslant 0]$$

est presque sûr, c'est-à-dire que $\mathbf{P}(X \geqslant 0) = \mathbf{P}(\Omega)$*. Cela dit, elle ne signifie pas que* $[X \geqslant 0] = \Omega$*, donc la variable aléatoire* X *n'est pas nécessairement positive : elle est* presque sûrement positive *(relativement à* $\mathbf{P}$*).*

$\boxed{\textbf{4.b.}}$ Si $\mathbf{P}(X > 0) = 1$, alors les événements $[X \geqslant 0]$ et $[X \leqslant 0]$ sont indépendants.

● Vrai ❍ Faux

Comme $[X \leqslant 0] = [X > 0]^c$ *et que* $\mathbf{P}(X > 0) = 1$*, alors* $\mathbf{P}(X \leqslant 0) = 1 - 1 = 0$.
A priori, *les événements* $[X \geqslant 0]$ *et* $[X \leqslant 0]$ *ne sont pas incompatibles car*

$$[X \geqslant 0] \cap [X \leqslant 0] = [X = 0]$$

et rien ne prouve que $[X = 0] = \varnothing$.
En revanche, $[X = 0] \subset [X \leqslant 0]$*, donc* $\mathbf{P}(X = 0) = 0$ *et par conséquent*

$$\mathbf{P}([X \geqslant 0] \cap [X \leqslant 0]) = 0 = \underbrace{\mathbf{P}(X \geqslant 0)}_{=1} . \underbrace{\mathbf{P}(X \leqslant 0)}_{=0},$$

ce qui prouve que les événements $[X \geqslant 0]$ *et* $[X \leqslant 0]$ *sont indépendants.*

5

$\boxed{\textbf{5.a.}}$ Une variable aléatoire est constante si, et seulement si, elle est presque sûrement constante.

❍ Vrai ● Faux

L'événement certain est presque sûr :

$$[X = x_0] = \Omega \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P}(X = x_0) = 1$$

mais il arrive qu'un événement soit presque sûr sans être pour autant l'événement certain :

$$\mathbf{P}(X = x_0) = 1 \quad \not\Rightarrow \quad [X = x_0] = \Omega$$

donc l'équivalence est fausse.

$\boxed{\textbf{5.b.}}$ Une variable aléatoire est presque sûrement constante si, et seulement si, sa variance est nulle.

● Vrai ❍ Faux

Cette équivalence est démontrée dans le cours.

6

Il existe une constante réelle a telle que la variable aléatoire $X - a$ soit centrée.

✔ Vrai

✔ Vrai et le réel a est unique

❏ Faux

❏ Aucune idée !

Comme X ne prend qu'un nombre fini de valeurs, elle admet une espérance.
Par linéarité de l'espérance, la variable $(X - a)$ est ***centrée*** *si, et seulement si,*

$$\mathbf{E}(X - a) = \mathbf{E}(X) - a = 0$$

c'est-à-dire si $a = \mathbf{E}(X)$.

7

On considère deux événements $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{A}$.

7.a. Si A est indépendant de A, alors $\mathbf{P}(A) = 1$.

❍ Vrai ● Faux

La propriété $\mathbf{P}(A \cap A) = [\mathbf{P}(A)]^2$ se traduit par le fait que $u = \mathbf{P}(A)$ est une solution de l'équation $u = u^2$, ce qui équivaut à $\mathbf{P}(A) = 0$ ou 1.

7.b. Si A et B sont indépendants, alors A et B^c sont indépendants.

● Vrai ❍ Faux

Comme (B, B^c) est un système complet d'événements, alors

$$A = (A \cap B) \sqcup (A \cap B^c)$$

et donc, par indépendance,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A \cap B^c) &= \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(A \cap B)\\ &= \mathbf{P}(A).\big[1 - \mathbf{P}(B)\big]\\ &= \mathbf{P}(A).\mathbf{P}(B^c).\end{aligned}$$

❧ *Par symétrie, A^c et B sont indépendants.*

7.c. Si A et B sont indépendants, alors A^c et B^c sont indépendants.

● Vrai ❍ Faux

D'après la question précédente, A et B^c sont indépendants. En appliquant à nouveau cette propriété (en échangeant les rôles des deux événements), on en déduit que A^c et B^c sont indépendants.

$\boxed{\textbf{7.d.}}$ Si $\mathbf{P}(A) = 0$, alors, quel que soit $B \in \mathcal{A}$, les événements A et B sont indépendants.

● Vrai ❍ Faux

Comme $A \cap B \subset A$ et que A est négligeable, alors

$$\mathbf{P}(A \cap B) = 0 = \underbrace{\mathbf{P}(A)}_{=0} . \mathbf{P}(B)$$

donc A et B sont indépendants.
❧ *Cette propriété est vraie aussi lorsque l'événement A est presque sûr.*

8

Soient a et b, deux nombres réels.

$\boxed{\textbf{8.a.}}$ L'espérance $\mathbf{E}(aX + b)$ est égale à

✔ $a\,\mathbf{E}(X) + b$

❏ $a\,\mathbf{E}(X)$

❏ $\mathbf{E}(X)$

❏ $a^2 E(X)$

Cette propriété s'appelle la linéarité de l'espérance.

$\boxed{\textbf{8.b.}}$ La variance $\mathbf{V}(aX + b)$ est égale à

❏ $a^2\,\mathbf{V}(X) + b^2$

✔ $a^2\,\mathbf{V}(X)$

❏ $a\,\mathbf{V}(X)$

❏ $a^2\,\mathbf{V}(X) + b$

*La variance, en tant qu'*indicateur de dispersion, *n'est pas modifiée quand on ajoute une constante : la variance de $aX + b$ ne dépend pas de b.*
En tant que moyenne des écarts quadratiques, *quand on multiplie par une constante a, la variance est multipliée par a^2.*

9

On considère deux variables aléatoires discrètes X et Y définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ à valeurs réelles.

$\boxed{\textbf{9.a.}}$ Si les variables aléatoires X et Y ont même loi, alors elles ont même espérance.

● Vrai ❍ Faux

$\boxed{\textbf{9.b.}}$ Dans ce cas, elles ont aussi même variance.

● Vrai ❍ Faux

L'espérance et de la variance d'une variable aléatoire sont définies à partir de la loi de cette variable.

$\boxed{\textbf{9.c.}}$ Si X et Y ont même loi, alors

$$\forall\, u \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{P}(X = u) = \mathbf{P}(Y = u).$$

● Vrai ❍ Faux

Comme X et Y sont deux variables aléatoires discrètes, cette identité signifie exactement que X et Y ont même loi.

9.d. Dans ce cas, on a aussi

$$\forall\,(u,v)\in\mathbb{R}^2,\quad \mathbf{P}(X=u,Y=v)=\mathbf{P}(Y=u,Y=v).$$

❍ Vrai ● Faux

Cette identité signifie que les ***couples*** (X,Y) *et* (Y,Y) *ont même loi et en particulier que*

$$\mathbf{P}(X=Y)=\mathbf{P}(Y=Y)=1$$

donc que X *et* Y *sont presque sûrement égales !*
Ce n'est pas impossible, mais l'hypothèse que X *et* Y *ont même loi ne permet pas de prouver que* X *et* Y *sont presque sûrement égales.*

10

On considère deux variables aléatoires discrètes X et Y définies sur $(\Omega,\mathcal{A},\mathbf{P})$ à valeurs réelles.

10.a. Si $\mathbf{E}(X)=\mathbf{E}(Y)$, alors X et Y ont même loi.

❍ Vrai ● Faux

La variable de Bernoulli de paramètre $p=1/2$ *et la variable aléatoire constante égale à* $1/2$ *ont même espérance, mais elles n'ont pas même loi.*
Il faut retenir que l'espérance indique la valeur moyenne et ne permet donc pas de connaître la manière dont les différentes valeurs sont réparties.

10.b. Si $\mathbf{E}(X)=\mathbf{E}(Y)$ et $\mathbf{V}(X)=\mathbf{V}(Y)$, alors X et Y ont même loi.

❍ Vrai ● Faux

De même, la variance indique la concentration des valeurs autour de la valeur moyenne, mais ne permet pas d'en déduire leur répartition.
Il est plus difficile de construire un contre-exemple : si U *suit la loi* $\mathscr{B}(p)$ *et si* V *suit la loi* $\mathscr{B}(10,p)$*, alors*

$$X=\frac{U-p}{\sqrt{pq}}\quad\text{et}\quad Y=\frac{V-10p}{\sqrt{10pq}}$$

ont même espérance (égale à 0*) et même variance (égale à* 1*) alors qu'elles n'ont pas même loi (la variable* X *ne prend que* 2 *valeurs distinctes, tandis que* Y *prend* 11 *valeurs distinctes).*

10.c. Si les variables aléatoires X et Y sont égales, alors elles ont même loi.

● Vrai ❍ Faux

Si X *et* Y *sont égales, alors*

$$\forall\,u\in\mathbb{R},\quad X(\omega)=u\iff Y(\omega)=u$$

c'est-à-dire

$$\forall\,u\in\mathbb{R},\quad [X=u]=[Y=u]$$

et en particulier

$$\forall\,u\in\mathbb{R},\quad \mathbf{P}(X=u)=\mathbf{P}(Y=u).$$