Probabilités MPSI — août 2020

Les questions indexées par des numéros différents sont indépendantes.
Pour l'ensemble des questions, on considère un espace probabilisé

$$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}).$$

Dans un premier temps, on étudie une variable aléatoire discrète X. On note $E_X \subset \mathbb{R}$, l'ensemble *fini* des valeurs prises par X.

1

1.a. La lettre $\mathbf{P}$ désigne

- ❏ une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$
- ❏ une fonction définie sur Ω
- ❏ une fonction définie sur $\mathcal{A}$
- ❏ une fonction définie sur E_X

1.b. La loi de la variable aléatoire X est

- ❏ une loi de probabilité sur Ω
- ❏ une loi de probabilité sur E_X
- ❏ une fonction définie sur E_X
- ❏ une fonction définie sur l'ensemble $\mathfrak{P}(E_X)$ des parties de E_X.

1.c. La notation $[X = x]$ désigne un événement

- ❏ pour tout $x \in \mathbb{R}$
- ❏ pour tout $x \in E_X$ seulement
- ❏ c'est plus compliqué !

2

2.a. Il existe un réel x tel que $[X = x]$ soit l'événement impossible.

- ❏ Vrai
- ❏ Vrai et même pour une infinité de valeurs de x
- ❏ Faux

2.b. La notation $[X \geqslant 0]$ désigne un événement.

❍ Vrai ❍ Faux

3

3.a. Si $\mathbf{P}(X \geqslant 0) = 1$, alors $[X \geqslant 0]$ est l'événement certain.

❍ Vrai ❍ Faux

3.b. Si $\mathbf{P}(X \geqslant 0) = 1$, alors $\mathbf{E}(X) \geqslant 0$.

❍ Vrai ❍ Faux

3.c. Si $\mathbf{E}(X) \geqslant 0$, alors $\mathbf{P}(X \geqslant 0) = 1$.

❍ Vrai ❍ Faux

3.d. Si l'espérance de X est nulle, alors

❏ $0 \leqslant \mathbf{P}(X > 0) < 1$

❏ $0 < \mathbf{P}(X > 0) < 1$

❏ $0 \leqslant \mathbf{P}(X > 0) \leqslant 1$

❏ $0 < \mathbf{P}(X > 0) \leqslant 1$

4

4.a. La variable aléatoire X est positive si, et seulement si, $\mathbf{P}(X \geqslant 0) = 1$.

❍ Vrai ❍ Faux

4.b. Si $\mathbf{P}(X > 0) = 1$, alors les événements $[X \geqslant 0]$ et $[X \leqslant 0]$ sont indépendants.

❍ Vrai ❍ Faux

5

5.a. Une variable aléatoire est constante si, et seulement si, elle est presque sûrement constante.

❍ Vrai ❍ Faux

5.b. Une variable aléatoire est presque sûrement constante si, et seulement si, sa variance est nulle.

❍ Vrai ❍ Faux

6

Il existe une constante réelle a telle que la variable aléatoire $X - a$ soit centrée.

❏ Vrai

❏ Vrai et le réel a est unique

❏ Faux

❏ Aucune idée !

7

On considère deux événements $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{A}$.

7.a. Si A est indépendant de A, alors $\mathbf{P}(A) = 1$.

❍ Vrai ❍ Faux

7.b. Si A et B sont indépendants, alors A et B^c sont indépendants.

❍ Vrai ❍ Faux

7.c. Si A et B sont indépendants, alors A^c et B^c sont indépendants.

❍ Vrai ❍ Faux

7.d. Si $\mathbf{P}(A) = 0$, alors, quel que soit $B \in \mathcal{A}$, les événements A et B sont indépendants.

❍ Vrai ❍ Faux

8

Soient a et b, deux nombres réels.

8.a. L'espérance $\mathbf{E}(aX + b)$ est égale à

- ❏ $a\,\mathbf{E}(X) + b$
- ❏ $a\,\mathbf{E}(X)$
- ❏ $\mathbf{E}(X)$
- ❏ $a^2 E(X)$

8.b. La variance $\mathbf{V}(aX + b)$ est égale à

- ❏ $a^2\,\mathbf{V}(X) + b^2$
- ❏ $a^2\,\mathbf{V}(X)$
- ❏ $a\,\mathbf{V}(X)$
- ❏ $a^2\,\mathbf{V}(X) + b$

9

On considère deux variables aléatoires discrètes X et Y définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ à valeurs réelles.

9.a. Si les variables aléatoires X et Y ont même loi, alors elles ont même espérance.

❍ Vrai ❍ Faux

9.b. Dans ce cas, elles ont aussi même variance.

❍ Vrai ❍ Faux

9.c. Si X et Y ont même loi, alors

$$\forall\, u \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{P}(X = u) = \mathbf{P}(Y = u).$$

❍ Vrai ❍ Faux

9.d. Dans ce cas, on a aussi

$$\forall\, (u, v) \in \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{P}(X = u, Y = v) = \mathbf{P}(Y = u, Y = v).$$

❍ Vrai ❍ Faux

10

On considère deux variables aléatoires discrètes X et Y définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ à valeurs réelles.

10.a. Si $\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(Y)$, alors X et Y ont même loi.

❍ Vrai ❍ Faux

10.b. Si $\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(Y)$ et $\mathbf{V}(X) = \mathbf{V}(Y)$, alors X et Y ont même loi.

❍ Vrai ❍ Faux

10.c. Si les variables aléatoires X et Y sont égales, alors elles ont même loi.

❍ Vrai ❍ Faux